

UDK 624.04 Nonrad, K.

LABORATORIET FOR HUSBYGNING

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

*Georg Vilhelm Knudsen*

NR.

12

GRUPPE

AI

UOK 624.04

# LIGEVÆGTSLÆRE

OG

## STYRKELÆRE

TILHØREN

INSTITUT FOR BYGNINGER OG ENERGI  
DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

*24.11.04 37012*

TIL BRUG VED UNDERVISNINGEN

I

DET TEKNISKE SELSKABS SKOLER  
FOR BYGNINGSHAANDVÆRKERE, MASKINKONSTRUKTØRER  
OG ELEKTROTEKNIKERE.

UDARBEJDET AF

*M. S. 45*

*2. 2. 118*

K. MONRAD.

TREDIE UDGAVE.

TRYKT SOM MANUSKRIFT.

KØBENHAVN.

TRYKT HOS A/S PEDER ANDERSEN.

1909.

## Forord.

---

Den her foreliggende 3die Udgave er i alt væsentligt overensstemmende med de paa det tekniske Selskabs Skoles Foranstaltning i 1892 og 1900 udarbejdede og indeholder en efter Elevernes Forkundskaber og Udvikling afpasset Fremstilling af Ligevægtslærens og Styrkelærens Grundprinciper samt deres Anvendelse paa Bygnings- og Maskinkonstruktioner. Ved Fremstillingen heraf følges Beregningsmetoden og den grafiske Metode jævnsides, for at disse Metoder kunne støtte hinanden gensidig og derved lette Forstaaelsen for Eleverne, hvilket yderligere er søgt opnaaet ved talrige Eksempler.

I denne Udgave ere Maal- og Vægtstørrelser i samtlige Taleksempler angivne i det metriske System. De af Hensyn hertil nødvendige Ændringer og Beregninger ere udførte af Hr. Ingeniør, cand. polyt. *Chr. J. Thorup*, som ogsaa har udført den væsentligste Del af Korrekturarbejdet.

Bag i Bogen findes Planer med de til Teksten hørende Skitser og i et Hefte for sig forskellige Tabeller over Materialernes Vægt, Paavirkninger m. m.

## Indledning.

Ligevægtslæren giver Oplysning om, under hvilke Betingelser der er Ligevægt mellem Kræfter, samt om, hvorledes man finder de Paavirkninger, som givne ydre Kræfter frembringe i Dele af Bygninger og Maskiner, hvorimod Styrkelæren omhandler, hvorledes man finder de Dimensioner, som man skal give de vedkommende Konstruktionsdele, for at de kunne være i Stand til at modstaa Paavirkningerne uden at brydes eller i for høj Grad forandre Form.

Under Fremstillingen er Stoffet behandlet i 3 Hovedafsnit. I det første af disse, som er kaldt Ligevægtslæren, er der givet en almindelig Udvikling af dennes Grundprinciper samt disses Anvendelse paa Jærn- og Trækonstruktioner, medens det andet Hovedafsnit er kaldt Styrkelæren og omhandler dennes Grundprinciper og deres Anvendelse paa Jærn- og Trækonstruktioner. I det tredje Hovedafsnit, Stenkonstruktioner, er der givet en Udvikling af saavel Ligevægtslærens som Styrkelærens Anvendelse paa Stenkonstruktioner.

## I. Ligevægtslæren.

En ydre Paavirkning eller Kraft udtrykkes i Vægt, altsaa i Kilogram, og den fremstilles i Tegning (grafisk) ved en ret Linie, hvis Længde angiver Kraftens Størrelse, medens Liniens Beliggenhed i Planet angiver Kraftens Beliggenhed. Den Retning, hvori Kraften virker, maa enten angives ved Liniens Benævnelse eller ved en paa Linien anbragt Pil.

Paa Fig. 1 virker  $AB$  fra venstre til højre,  $BA$  fra højre til venstre. Kraften  $1$  fra venstre til højre,  $2$  i modsat Retning.

Foruden ved Bogstaver kunne Kræfter ogsaa betegnes ved Tal anbragte i deres Endepunkter, saaledes som paa Fig. 1, hvor  $\overline{01}$  og  $\overline{32}$  begge virke fra venstre til højre, medens  $\overline{10}$  og  $\overline{23}$  virke i modsat Retning. Benyttes den grafiske Fremgangsmaade, maa man have en Maalestok for Kræfter, en Kraftmaalestok.

### 1. Sættning og Opløsning af Kræfter.

#### a. Kræfterne virke i samme rette Linie.

Angrib de givne Kræfter i forskellige Punkter af en ret Linie, vil deres samlede Virkning blive den samme, som om de angreb i eet Punkt, og saa stor som Summen af de enkelte Kræfter, idet disse regnes med Fortegn, saaledes at de, der virke i den ene Retning, regnes for positive, de, som virke i modsat Retning, for negative. Det er iøvrigt ligegyldigt, hvilken af Retningerne der regnes for positiv. Er Kræfternes Størrelse f. Eks. udtrykt i kg, faar man ved Beregning den samlede Virkning af dem, Resultanten, i kg ved Addition og Subtraktion af de enkelte Vægtstørrelser.

Er Summen af de positive Kræfter lig med Summen af de negative, bliver Resultantens Størrelse Nul 0: der er Ligevægt mellem Kræfterne.

Hvorledes man grafisk finder Resultanten af flere givne Kræfter, er vist paa Fig. 2, hvor de fire givne Kræfter  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$  og  $\overline{de}$  efterhaanden ere afsatte ved Siden af hverandre i den rette Linie  $AB$ , hvorefter de virke. Resultanten er Stykket fra Udgangspunktet til Endepunktet, altsaa her  $\overline{ae}$ .

Falder  $e$  i  $a$ , er der Ligevægt mellem Kræfterne.

For at opnaa større Tydelighed i Tegningerne, angives i Almindelighed (se Fig. 2) en Kraft ved to rette Linier, der altid ere parallelle, og af hvilke den ene angiver Kraftens Retning og Størrelse, den anden dens Beliggenhed og undertiden tillige dens Retning.

#### b. Kræfterne gaa gennem samme Punkt i Planet, men virke i forskellige Retninger.

Virke to Kræfter  $P$  og  $Q$  paa Punktet  $M$  efter de paa Fig. 3 angivne Pile, vilde  $M$  under deres samlede Paavirkning, ifald Punktet kunde flyttes, blive bevæget hen til  $C$  gennem Linien  $MC$ . Er Punktet  $M$  ubevægeligt, vil det derimod faa en Paavirkning efter Retningen  $MC$  af Størrelse  $MC=R$ , der kaldes de to Kræfters Resultant.  $MACB$  er et Parallelogram, Kræfternes Parallelogram, altsaa  $MB \neq AC$ . De tre Kræfter  $P$ ,  $Q$  og  $R$  danne saaledes en Trekant, den saakaldte Kræfternes Trekant, hvor  $P$  og  $Q$  gennemløbes i samme Retning,  $R$  i modsat Retning. Herved er den grafiske Fremgangsmaade given, idet man (Fig. 4) gennem et vilkaarligt Punkt i Planet, f. Eks.  $O$ , trækker en Linie  $\overline{01} \neq P$  og derpaa fra  $1$  en Linie  $\overline{12} \neq Q$ . Resultanten  $R$  er da i Størrelse og Retning  $\overline{02}$  (den rette

Linie fra Udgangspunktet til Endepunktet). Dens Beliggenhed faas ved gennem  $M$  at tegne en Linie parallel med  $\overline{OZ}$ .

Ad Beregningens Vej finder man Størrelsen og Retningen af Resultanten af to Kræfter, naar man kender deres Størrelser  $P$  og  $Q$  og den Vinkel  $v$ , som deres Retninger danne med hinanden, paa følgende Maade ved Hjælp af Trigonometrien (Fig. 4<sup>b</sup>):

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos (180 - v) = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos v$$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos v}$$

$$\sin \rho = \frac{P \sin (180 - v)}{R} = \frac{P \sin v}{R}$$

Ligesom to givne Kræfter kunne sammensættes til en Resultant, kan omvendt ogsaa en given Kraft opløses i to andre, Komposanterne.

Dette kan ligeledes ske saavel ved Beregning som ad grafisk Vej.

I første Tilfælde kommer man til at foretage en Trekantopløsning ved Hjælp af Trigonometrien, i sidste Tilfælde Konstruktion af en Trekant.

Med de paa Fig. 4<sup>b</sup> angivne Betegnelser kan saaledes  $R, \rho, q$  eller  $R, P, q$  eller  $R, P, \rho$  eller  $R, P, Q$  eller endelig  $R, P, v$  være givne, medens de øvrige Størrelser ere ubekendte.

Ekspl. 1. Givet Kræfterne  $P = 15$  kg og  $Q = 8$  kg samt deres mellemliggende Vinkel  $v = 20^\circ$ . Find Resultanten  $R$  (se Fig. 4<sup>b</sup>).

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos v} = \sqrt{15^2 + 8^2 + 2 \cdot 15 \cdot 8 \cos 20^\circ} \\ = 22,68 \text{ kg,}$$

$$\sin \rho = \frac{P \sin v}{R} = \frac{15 \sin 20^\circ}{22,68}, \rho = 13,07^\circ.$$

Ekspl. 2. En Snor gaar henover de to Skiver  $A$  og  $B$  (se Fig. 5) og bærer i sine Endepunkter Vægtene  $P = 16$  kg og  $Q = 12$  kg. Hvor stor en Vægt  $V$  maa ophænges i Snoren mellem Skiverne, naar de to Snorparter skulle danne en ret Vinkel med hinanden? Der ses bort fra Gnidningsmodstande.

I den ene Snorpart vil virke et Træk  $ac = Q$ , i den anden  $ab = P$ . Resultanten af disse Træk vil være

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20.$$

$V$  maa have samme Størrelse som  $R$ , altsaa være 20 kg.

Ekspl. 3. En Kraft  $R = 5549$  kg skal opløses i to Komposanter, af hvilke den ene  $P$  er 2002 kg, medens den med  $R$  danner en Vinkel  $q$  paa  $50^\circ$ . Man skal finde den anden Komposant  $Q$  og den Vinkel  $\rho$ , som den danner med  $R$ . Opgaven løses paa lignende Maade som Opgave 1 (se Fig. 4<sup>b</sup>).  $Q = 4529,7$  kg;  $\rho = 19,79^\circ$ .

Ekspl. 4. En Kraft  $R = 612$  kg, dens ene Komposant  $P = 518$  kg og Vinklen mellem  $R$  og den anden Komposant  $Q$  er  $u = 47,88^\circ$ .

Find  $Q$  samt  $P$ 's Vinkel  $v$  med  $R$  (se Fig. 6).

$$\frac{R}{\sin t} = \frac{P}{\sin u}; \quad \sin t = \frac{R \sin u}{P} = \frac{612 \sin 47,88^\circ}{518}$$

$$t = 61,2^\circ \text{ eller } t = 180^\circ - 61,2^\circ = 118,8^\circ;$$

$$v = 180 - (u + t), \text{ altsaa}$$

$$v = 70,92^\circ \text{ eller } v = 13,32^\circ.$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin v}{\sin u}; \quad Q = \frac{P \sin v}{\sin u}, \text{ hvoraf man, ved deri at indsætte}$$

Værdierne for  $P$  og  $u$  samt  $v$ 's to Værdier, faar

$$Q = 660 \text{ kg og } Q = 160,9 \text{ kg.}$$

Opgaven har altsaa to Løsninger, idet der findes to Kræfternes Parallelogrammer, som indeholde de givne Størrelser  $R$ ,  $P$  og  $u$ , nemlig  $AFCE$  og  $ABCD$ .

Ekspl. 5. Kraften  $S = 500 \text{ kg}$  virker gennem Spæret  $AB$ .  $S$  skal opløses i en vandret Komposant  $P$  og en lodret Komposant  $Q$ . Retningen for  $S$  er bestemt ved  $\angle BAF = v = 30^\circ$  (Fig. 7).

$$P = S \cos v = 500 \cos 30^\circ = 433 \text{ kg.}$$

$$Q = S \sin v = 500 \sin 30^\circ = 250 \text{ kg.}$$

Ekspl. 6. En Kraft  $R = 1000 \text{ kg}$  skal opløses i to Komposanter  $P = 600 \text{ kg}$  og  $Q = 800 \text{ kg}$ . Find de Vinkler  $v$  og  $u$ , som henholdsvis  $P$  og  $Q$  danne med  $R$ .

$$Q^2 = P^2 + R^2 - 2 PR \cos v; \cos v = \frac{P^2 + R^2 - Q^2}{2 PR}$$

$$\cos v = \frac{3}{5}; v = 53,13^\circ.$$

$$\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{P}{Q}; \sin u = \frac{P \sin v}{Q}; u = 36,87^\circ.$$

Ofte bestemmes en given Krafts Retning ved de to Vinkler, som den danner med to paa hinanden vinkelrette Linier  $OX$  og  $OY$ .

I de fire følgende Opgaver er dette nærmere oplyst. Der er givet en Kraft  $K$  samt de Vinkler  $u$  og  $v$ , som den danner med de to paa hinanden vinkelrette Linier  $OX$  og  $OY$ .  $K$ 's Komposanter  $P$  og  $Q$  efter disse Linier søges.

Ekspl. 7.

$$K = 2000 \text{ kg; } u = 30^\circ; v = 60^\circ \text{ (se Fig. 8).}$$

$$P = K \cos u = 2000 \cos 30^\circ = 1732 \text{ kg.}$$

$$Q = K \cos v = 2000 \cos 60^\circ = 1000 \text{ kg.}$$

Ekspl. 8.

$$K = 1500 \text{ kg; } u = 135^\circ; v = 45^\circ \text{ (se Fig. 9).}$$

$$P = 1500 \cos 135^\circ = -1500 \cos 45^\circ = -1060 \text{ kg.}$$

$$Q = 1500 \cos 45^\circ = 1060 \text{ kg.}$$

Ekspl. 9.

$$K = 3000 \text{ kg; } u = 115,34^\circ; v = 154,66^\circ \text{ (se Fig. 10).}$$

$$P = 3000 \cos 115,34^\circ = -3000 \cos 64,66^\circ = -1283 \text{ kg.}$$

$$Q = 3000 \cos 154,66^\circ = -3000 \cos 25,34^\circ = -2711 \text{ kg.}$$

Ekspl. 10.

$$K = 1000 \text{ kg; } u = 60^\circ; v = 150^\circ \text{ (se Fig. 11).}$$

$$P = 1000 \cos 60^\circ = 500 \text{ kg.}$$

$$Q = 1000 \cos 150^\circ = -1000 \cos 30^\circ = -866 \text{ kg.}$$

Virke flere end to Kræfter gennem samme Punkt i Planet, kan man bestemme deres Resultant ved først at finde Resultanten af to af Kræfterne, derpaa sammensætte

denne med en 3die Kraft, den herved fremkomne Resultant med en 4de Kraft o. s. v., som vist paa Fig. 12.

Af de givne Kræfter  $\overline{01}$ ,  $\overline{02}$ ,  $\overline{03}$ ,  $\overline{04}$  og  $\overline{05}$  ere først  $\overline{01}$  og  $\overline{02}$  sammensatte til Resultanten  $\overline{02'}$ , denne danner med  $\overline{03}$  Resultanten  $\overline{03'}$ , denne med  $\overline{04}$  Resultanten  $\overline{04'}$  og denne sidste med  $\overline{05}$  Resultanten  $\overline{05'}$ , der altsaa bliver Resultanten af alle fem Kræfter. Af den Maade, hvorpaa Fig. 12 er dannet, fremgaar det, at  $\overline{12} \neq \overline{02}$ ,  $\overline{23} \neq \overline{03}$ ,  $\overline{34} \neq \overline{04}$  og  $\overline{45} \neq \overline{05}$ . Dette benyttes til den grafiske Bestemmelse af flere Kræfters Resultant, idet alle Diagonalerne i de enkelte Parallelogrammer udelades, og selve Konstruktionen udføres paa et andet Sted af Planet end der, hvor de givne Kræfter ere beliggende.

Skal man saaledes finde Resultanten af Kræfterne  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  og  $P_5$  (Fig. 13<sup>a</sup>), tegnes der gennem et virkaarligt Punkt  $o$  (Fig. 13<sup>b</sup>) en Linie  $\overline{01} \neq P_1$  og i samme Retning som denne, fra 1 Linien  $\overline{12} \neq P_2$ , fra 2 Linien  $\overline{23} \neq P_3$  o. s. v., idet man bestandig sørger for, at disse Linier komme til at gaa i samme Retning som vedkommende Kraft. Resultanten er nu i Størrelse og Retning  $\overline{05}$  fra Udgangspunktet til Endepunktet, og dens Beliggenhed faas ved gennem  $O$  at tegne Linien  $R \neq \overline{05}$ .

Den brudte Linie fra  $o$  til  $5$  kaldes en Kraftpolygon.

Den Orden, i hvilken Kræfterne afsættes efter hverandre, er ligegyldig, hvad Bestemmelsen af Resultanten angaar, men Polygonen  $\overline{012345}$ 's Form vil selvfølgelig, efter den forskellige Orden, hvori Kræfterne afsættes, blive forskellig.

Have flere Kræfter ikke samme Angrebspunkt, medens dog Kraftlinierne ved Forlængelse ville skære hverandre i eet Punkt, bliver Resultanten i Størrelse, Retning og Be-

liggenhed den samme, som om alle Kræfterne virkede i dette Punkt, og den bestemmes derfor ganske paa samme Maade.

Af Fig. 13<sup>b</sup> fremgaar det, at man ved at følge Pilene fra  $o$  kan gennemløbe alle Sider kontinuerligt med Undtagelse af Resultanten ( $\overline{05}$ ), hvis Pil man vil møde i Punkt 5.

Falder den sidste Krafts Endepunkt i det oprindelige Udgangspunkt, bliver Resultanten Nul, der er Ligevægt mellem Kræfterne. I saa Fald gennemløbes alle Sider kontinuerligt, og Kraftpolygonen er lukket (Fig. 14).

Naar man ved Beregning vil finde Resultanten af flere givne Kræfter, som angribe i eet Punkt, gaar man frem paa den Maade, at man gennem Punktet lægger to paa hinanden vinkelrette Linier, de saakaldte Koordinataksler, af hvilke den ene benævnes  $X$ -Aksen eller Abscissaaksen og den anden  $Y$ -Aksen eller Ordinataaksen, og opløser alle Kræfterne i Komposanter efter disse Akser. Derefter sammensætter man Komposanterne efter  $X$ -Aksen til en Resultant for sig og Komposanterne efter  $Y$ -Aksen ligeledes til en Resultant for sig, og disse to Resultanter, hvoraf den ene virker i  $X$ -Aksen og den anden i  $Y$ -Aksen, sammensættes endelig til een Resultant, som altsaa maa blive Resultanten af alle de givne Kræfter.

Er saaledes (Fig. 15) fem Kræfter  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  og  $P_5$  givne i Størrelse og yderligere bestemte ved, at de alle gaa gennem Punktet  $O$ , samt ved, at deres Retninger danne givne Vinkler med de to Akser  $OX$  ( $X$ -Aksen) og  $OY$  ( $Y$ -Aksen), idet

$P_1$	danner	$\angle u_1$	med	$OX$	og	$\angle v_1$	med	$OY$
$P_2$	---	$\angle u_2$	---	---	---	$\angle v_2$	---	---
$P_3$	---	$\angle u_3$	---	---	---	$\angle v_3$	---	---
$P_4$	---	$\angle u_4$	---	---	---	$\angle v_4$	---	---
$P_5$	---	$\angle u_5$	---	---	---	$\angle v_5$	---	---



da ville de fem Kræfters Komposanter efter  $OX$  være  $P_1 \cos u_1$ ;  $P_2 \cos u_2$ ;  $P_3 \cos u_3$ ;  $P_4 \cos u_4$ ;  $P_5 \cos u_5$ , og deres Komposanter efter  $OY$ :  $P_1 \cos v_1$ ;  $P_2 \cos v_2$ ;  $P_3 \cos v_3$ ;  $P_4 \cos v_4$ ;  $P_5 \cos v_5$ . Cosinusserne ville ved deres Fortegn bestemme de enkelte Komposanters Fortegn. Bliver Komposanten positiv, virker den efter henholdsvis  $OX$  eller  $OY$  (Koordinataksernes positive Retninger), bliver den negativ, efter deres Forlængelser (Koordinataksernes negative Retninger) udover Skæringspunktet  $O$ , der kaldes Begyndelsespunktet.

Resultantens Komposant  $R_x$  efter  $OX$  vil være Summen af Kræfternes  $X$ -Komposanter, altsaa

$$R_x = P_1 \cos u_1 + P_2 \cos u_2 + P_3 \cos u_3 + P_4 \cos u_4 + P_5 \cos u_5,$$

og Resultantens Komposant  $R_y$  efter  $OY$  bliver i Lighed hermed

$$R_y = P_1 \cos v_1 + P_2 \cos v_2 + P_3 \cos v_3 + P_4 \cos v_4 + P_5 \cos v_5.$$

$R_x$  og  $R_y$  danne  $90^\circ$  med hinanden, og Resultanten af dem vil altsaa i Størrelse være

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

medens dens Vinkler  $u$  og  $v$  med  $OX$  og  $OY$  bestemmes ved

$$\cos u = \frac{R_x}{R} \text{ og } \cos v = \frac{R_y}{R}.$$

Eksp. 11. Fire Kræfter  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  og  $P_4$ , i Størrelse henholdsvis 6, 9, 12 og 15 kg, virke i samme Plan gennem eet Punkt.  $P_1$  og  $P_3$  danne en ret Vinkel med hinanden.  $P_2$  ligger mellem  $P_1$  og  $P_3$  og danner  $40^\circ$  med  $P_1$  og  $50^\circ$  med  $P_3$ ,  $P_4$  danner  $130^\circ$  med  $P_1$  og  $40^\circ$  med  $P_3$ .

Resultantens Størrelse og Retning skal findes. Vælges  $P_1$  til  $X$ -Aks og  $P_3$  til  $Y$ -Aks, vise Kræfterne sig beliggende som paa Fig. 16.

$$P_1 = 6; P_2 = 9; P_3 = 12; P_4 = 15.$$

$$u_1 = 0^\circ; u_2 = 40^\circ; u_3 = 90^\circ; u_4 = 130^\circ.$$

$$v_1 = 90^\circ; v_2 = 50^\circ; v_3 = 0^\circ; v_4 = 40^\circ.$$

$$P_1 \cos u_1 = 6 \cos 0^\circ = +6,000 \quad P_1 \cos v_1 = 6 \cos 90^\circ = +0,000$$

$$P_2 \cos u_2 = 9 \cos 40^\circ = +6,894 \quad P_2 \cos v_2 = 9 \cos 50^\circ = +5,785$$

$$P_3 \cos u_3 = 12 \cos 90^\circ = +0,000 \quad P_3 \cos v_3 = 12 \cos 0^\circ = +12,00$$

$$P_4 \cos u_4 = 15 \cos 130^\circ = -9,642 \quad P_4 \cos v_4 = 15 \cos 40^\circ = +11,49$$

$$R_x = +3,252$$

$$R_y = +29,275.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 29,46 \text{ kg,}$$

$$\cos u = \frac{R_x}{R} = \frac{3,252}{29,46}; u = 83,66^\circ.$$

$$\cos v = \frac{R_y}{R} = \frac{29,275}{29,46}; v = 6,4^\circ.$$

### c. Momenter.

Virker Kraften  $P$  paa et Punkt  $B$  (Fig. 17), som antages fast forbundet med et fastliggende Punkt  $O$ , vil  $B$  ikke kunne bevæges retlinet fremad under  $P$ 's Paavirkning, men der vil om  $O$  finde en Omdrejning Sted, eller der vil, ifald denne Omdrejning forhindres, være en Bestræbelse dertil. Denne Bestræbelse maales ved Produktet af Kraften  $P$  og Punktet  $O$ 's Afstand  $a$  fra Kraftens Linie.  $Pa$  kaldes Kraftens Moment med Hensyn til  $O$ , som kaldes Momentpunktet.  $a$  kaldes Momentets Arm. Er Kraften given i Kilogram og Afstanden i Meter, Centimeter

eller Millimeter, kaldes Momentet altsaa Kilogram-Meter, Kilogram-Centimeter eller Kilogram-Millimeter, der betegnes ved henholdsvis kgm, kgcm og kgmm.

Da der i Momentet indgaar baade en Kraft og en Linie, vil det ved den grafiske Fremstilling være nødvendigt, foruden en Kraftmaalestok, ogsaa at have en Maalestok for Længder, en Længdemaalestok.

Virke to Kræfter af samme Størrelse til Omdrejning om et Punkt, vil altsaa Momentet være størst for den Kraft, der ligger længst fra Punktet. Ere Kræfterne ulige store, men ligge i samme Afstand fra Punktet, virker den største Kraft med størst Moment.

Ligger Momentpunktet i Kraftens Linie, er Momentet Nul.

Ligesom Kræfter regnes ogsaa Momenter med Fortegn, saaledes at alle Momenter, der virke til Omdrejning i samme Retning, faa samme Fortegn.

Virker der igennem to fastbundne Punkter  $A$  og  $B$  (Fig. 18) to Kræfter af samme Størrelse  $P$ , men i modsat Retning, vil Summen af disse Kræfters Momenter med Hensyn til et hvilket som helst Punkt i Planet være konstant  $\sigma$ : have samme Størrelse, hvor Momentpunktet end ligger. Vælger man til Momentpunkt  $O$ , hvis Afstande fra de to Kræfter ere  $l$  og  $m$ , vil Summen af Momenterne være

$$Pm - Pl = P(m - l) = Pa.$$

eller Produktet af en af de ligestore Kræfter  $P$  og Afstanden  $a$  imellem dem.

Vælger man  $O$  liggende imellem Kræfterne, ville begge Momenter faa samme Fortegn, og Størrelsen indenfor Parantesen altsaa blive en Sum af Størrelse  $a$ .

De to ligestore Kræfter siges at danne et Kraftpar (Svingkraft).

*d. Kræfterne virke gennem flere fastforbundne Punkter i forskellige Retninger.*

Saadanne Kræfter ville, forsaa vidt de ikke holde hverandre i Ligevægt, enten kunne erstattes ved en enkelt Kraft eller ved et Kraftpar.

Den her foreliggende Opgave vil straks dele sig i to Dele.

1. Bestemmelsen af Resultantens Størrelse.
2. Bestemmelsen af dens Beliggenhed.

Resultantens Størrelse findes paa samme Maade som i det Tilfælde, hvor Kræfterne gaa gennem samme Punkt.

Beliggenheden kan bestemmes ved successiv Anvendelse af Kræfternes Parallelogram, men denne Fremgangsmaade er i Almindelighed vidtløftig, og den skal derfor ikke omtales nærmere. Man gaar derimod frem paa følgende Maade:

Paa Fig. 19 er der givet fire Kræfter  $P_1, P_2, P_3$  og  $P_4$ . Efterat man først har dannet Kraftpolygonen  $01234$  ved fra et vilkaarligt Punkt  $0$  at tegne Linier ligestore og parallelle med de givne Kræfter og derved fundet Resultanten  $04$  i Størrelse og Retning, vælger man et andet Punkt  $p$ , Polen, vilkaarligt, dog i Almindelighed hverken i nogen af Kraftpolygonens Sider eller Vinkelspidser, og trækker derfra Linier til alle Kraftpolygonens Vinkelspidser; disse Linier kaldes Polstraalerne. Fra et i  $P_1$  vilkaarligt valgt Punkt  $I$  tegnes Linier parallelle med de to Straaler, som omslutte  $01$ ; den med  $1p$  parallelle Linie skærer  $P_2$  i  $II$ , hvorfra en Linie tegnes parallel med  $2p$  til Skæring med  $P_3$ ; Skæringspunktet betegnes med  $III$ . Herfra føres en Linie parallel med  $3p$  til Skæring med  $P_4$ , og fra disses Skæringspunkt  $IV$  en Linie parallel med  $4p$ . Ved denne Linies Skæring med den Linie, der gennem  $I$  er tegnet parallel med  $0p$ , faar man  $V$ , som er et Punkt af Resultanten, hvorfor denne,  $R$ , trækkes derigennem parallel med  $04$ .

Ved Bestemmelsen af disse Kræfters Resultant er man begyndt med at opløse en af dem, nemlig  $P_1$ , i et vilkaarligt Punkt  $I$  i to Komposanter, hvis Retninger og Størrelser ere bestemte ved Polstraalerne til  $\overline{OI}$ 's Endepunkter, altsaa her (Fig. 19<sup>b</sup>) ved  $\overline{Op}$  og  $\overline{p1}$ , medens deres Beliggenhed maa være  $\overline{IV}$  og  $\overline{III}$ . Derefter ere alle de øvrige Kræfter paa samme Maade opløste i to Komposanter, nemlig  $P_2$  i Punkt  $II$  i Komposanterne  $\overline{Ip}$  og  $\overline{p2}$ ,  $P_3$  i Punkt  $III$  i  $\overline{2p}$  og  $\overline{p3}$  og  $P_4$  i  $IV$  i  $\overline{3p}$  og  $\overline{p4}$ . De oprindelig givne Kræfter erstattes altsaa af  $\overline{Op}$ ,  $\overline{p1}$ ,  $\overline{Ip}$ ,  $\overline{p2}$ ,  $\overline{2p}$ ,  $\overline{p3}$ ,  $\overline{3p}$  og  $\overline{p4}$ , af hvilke  $\overline{p1}$  og  $\overline{Ip}$  begge virke i  $\overline{III}$  i modsatte Retninger, hvorfor deres Resultant er Nul. Af lignende Grund ville  $\overline{p2}$  og  $\overline{2p}$  samt  $\overline{p3}$  og  $\overline{3p}$  hæve hinanden, saa at kun  $\overline{Op}$  og  $\overline{p4}$  blive tilbage. Disses Resultant, som er  $\overline{O4}$ , maa gaa gennem de to Kraftlinier  $\overline{IV}$ 's og  $\overline{VIV}$ 's Skæringspunkt  $V$ , og dermed er Rigtigheden af denne Maade at bestemme Resultanten paa bevist. Polygonen  $I II III IV V$  kaldes en Stangpolygon. Den bliver i dette Tilfælde lukket, medens Kraftpolygonen er aaben.

Anbringer man paa det Sted, hvor Resultanten  $R$  falder (se Fig. 20), en Kraft  $P_5$  af samme Størrelse som  $R$ , men virkende i modsat Retning, vil den med  $R$ , som erstatter  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  og  $P_4$ , danne en Resultant af Størrelse Nul;  $P_5$  og de fire givne Kræfter  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  og  $P_4$  holde altsaa hverandre i Ligevægt. Kraftpolygonen vil her faa sit Endepunkt i  $5$ , som falder sammen med  $0$ , og vil saaledes blive lukket.

Stangpolygonen  $I II III IV V$  bliver i dette Tilfælde ogsaa lukket, og der vil her virke een Kraft i enhver af dens Vinkelspidser, medens der i det foregaaende Tilfælde ikke virkede nogen Kraft gennem Stangpolygonens Vinkelspids  $V$ .

Ønsker man at bestemme Resultanten af nogle enkelte af de givne Kræfter f. Eks. af  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$ , findes dens

Størrelse og Retning som Diagonalen  $\overline{03}$  paa Fig. 20<sup>b</sup>, medens dens Beliggenhed maa være bestemt ved Skæringspunktet af de to Stangpolygonsider, som ere parallelle med de to Polstraaler, der omslutte  $\overline{03}$ . Dette Punkt er paa Fig. 20<sup>a</sup> betegnet med  $B$ , og herigennem er de tre Kræfters Resultantlinie  $R$ , tegnet parallel med  $\overline{03}$ . En saadan Resultant af enkelte af de givne Kræfter kaldes en partiel Resultant.

Da  $\overline{03}$  er en Diagonal i Kraftpolygonen, angive altsaa Diagonalerne i denne Størrelsen og Retningen af Resultanten af de Kræfter, som ere parallelle med de Kraftpolygonsider, der ligge mellem vedkommende Diagonals Endepunkter.

Af det anførte fremgaar nu, at flere givne Kræfter, som virke i forskellige Linier, der ikke skære hinanden i eet Punkt, have en enkelt Resultant, naar Kraftpolygonen er aaben og Stangpolygonen er lukket. Resultantens Størrelse og Retning ere i Kraftpolygonen angivne ved den Linie, der gaar fra Udgangspunktet til Endepunktet, og dens Beliggenhed er bestemt derved, at den skal gaa gennem Skæringspunktet af Stangpolygonens første og sidste Side.

Naar Kraftpolygon og Stangpolygon begge ere lukkede, er der Ligevægt imellem de givne Kræfter.

Endelig kan der indtræffe det Tilfælde, at Kraftpolygonen er lukket og Stangpolygonen aaben, idet dennes første og sidste Side blive parallelle. De givne Kræfter erstattes i saa Fald ved et Kraftpar.

Dette finder Sted, naar Resultanten af alle Kræfterne paa een nær er af samme Størrelse som denne, medens tillige denne Resultant og Kraft virke i modsatte Retninger efter to med hinanden parallelle Linier. Sammensætter man (Fig. 21) Kræfterne  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  og  $P_4$ , ville disse

Kræfter danne Resultanten  $R$  af Størrelse  $\overline{04}$  og gaende gennem  $V'$ . Denne Resultant vil i Forbindelse med  $P_5$ , som er af samme Størrelse, men virker i modsat Retning, danne et Kraftpar, hvis Størrelse er Produktet af  $P_5$  og Afstanden mellem  $R$  og  $P_5$ .

Vil man finde Resultanten af samtlige fem Kræfter ved Hjælp af Kraftpolygon og Stangpolygon, viser dette sig umuligt. Resultantens Størrelse bliver nemlig Nul (se Fig. 21<sup>b</sup>), og dens Beliggenhed paa Fig. 21<sup>a</sup> kan ikke bestemmes, eftersom Skæringspunktet mellem  $\overline{VII}$  og  $\overline{VII}$ , første og sidste Stangpolygonside, der begge blive parallelle med  $\overline{op}$ , falder uendelig fjernt. Disse Kræfter have altsaa ingen enkelt Resultant. Paa Fig. 21<sup>a</sup> er  $P_1$  i Punktet  $I$  opløst i  $\overline{op}$  og  $\overline{p1}$ ,  $P_2$  i Punktet  $II$  i  $\overline{1p}$  og  $\overline{p2}$ ,  $P_3$  i Punktet  $III$  i  $\overline{2p}$  og  $\overline{p3}$ ,  $P_4$  i Punktet  $IV$  i  $\overline{3p}$  og  $\overline{p4}$ , og  $P_5$  i Punktet  $V$  i  $\overline{4p}$  og  $\overline{p5}$ . Disse Komposanter ville hæve hinanden to og to med Undtagelse af  $\overline{op}$  og  $\overline{p5}$ , som vel ere ligestore og modsatte, men derimod virke i forskellige Kraftlinier, den ene i Linien  $\overline{VII}$  henimod  $I$ , den anden i  $\overline{VII}$  henimod  $VI$ . Disse to Kræfter af Størrelse  $\overline{op}$  danne saaledes et Kraftpar, hvis Moment er Produktet af  $\overline{op}$  og Afstanden mellem  $\overline{VII}$  og  $\overline{VII}$ , altsaa et andet Udtryk for det samme Kraftpar, der foroven blev udtrykt ved Produktet af  $P_5$  og Afstanden mellem  $R$  og  $P_5$ .

Dette af de sidst omtalte fem Kræfter dannede System vil have en Bestræbelse til Drejning, som maa modvirkes, hvis ikke en Bevægelse af Systemet skal finde Sted.

Ere saadanne Kræfter, som de paa Fig. 19, 20 og 21 viste, indbyrdes parallelle, og man skal finde Størrelsen og Beliggenheden af disse Kræfters Resultant; kan man ad grafisk Vej gaa frem ganske paa samme Maade, som foran angivet. Dette er nærmere oplyst ved et Eksempel.

Eksp. 12. Igennem fem indbyrdes fastforbundne Punkter virke fem Kræfter  $P_1 = 50$  kg,  $P_2 = 30$  kg,

$P_3 = 70$  kg,  $P_4 = 90$  kg og  $P_5 = 60$  kg, af hvilke  $P_1$ ,  $P_3$  og  $P_4$  virke lodret nedad og de andre lodret opad (se Fig. 22). De givne Kræfter skære Linien  $AE$ , som er vinkelret paa dem, i Punkterne  $A, B, C, D$  og  $E$ , hvis Beliggenhed er bestemt derved, at

$$AB = 50 \text{ cm}, AC = 120 \text{ cm}, AD = 210 \text{ cm} \text{ og } AE = 320 \text{ cm}.$$

Man skal bestemme de givne Kræfters Resultant.

Hvorledes dette gøres grafisk, er vist paa Fig. 22.

Kraftpolygonen (se Fig. 22<sup>b</sup>) bliver en ret Linie, og Resultanten  $R$  findes i Størrelse og Retning som Linien  $\overline{05}$ , altsaa som de enkelte Kræfters algebraiske Sum. Til Pol er valgt et vilkaarligt Punkt  $p$ , hvorfra Polstraalerne ere tegnede til Kraftpolygonens Vinkelspidser. Endelig har man ved Linier parallelle med Polstraalerne dannet Stangpolygonen  $I II III IV V VI$ , og Resultantens Beliggenhed er altsaa bestemt derved, at den skal gaa gennem  $VI$ , som er Skæringspunktet imellem første og sidste Stangpolygonside.

Af dette Eksempel fremgaar det, at man, hvis man ønskede at bestemme disse Kræfters Resultant  $R$  ved Beregning, straks kunde finde dens Størrelse og Retning ved at addere Kræfterne, som naturligvis maa regnes med Fortegn, de lodret nedad virkende positive og de lodret opad virkende negative eller omvendt.

$$\text{Man har altsaa } R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5.$$

Resultantens Beliggenhed kan findes ved den Ligning, som angiver, at Summen af de enkelte Kræfters Momenter med Hensyn til et eller andet vilkaarlig valgt Punkt er lige saa stor som Resultantens Moment med Hensyn til dette Punkt. Vælger man f. Eks. paa Linien  $AE$  et Punkt  $F$  til venstre for samtlige Kræfter og 10 cm fra  $A$

til Momentpunkt, bliver Momentligningen, naar Kræfternes Afstande fra  $F$  betegnes ved henholdsvis  $a_1, a_2, a_3, a_4$  og  $a_5$ ,

$$P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4 + P_5 a_5 \\ = (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) x,$$

hvor  $x$  angiver Punktets  $F$ 's Afstand fra Kræfternes Resultant  $R$ .

Af Ligningen faar man

$$x = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4 + P_5 a_5}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5}.$$

Indsætter man i de anførte Ligninger  $P_1 = +50, P_2 = -30, P_3 = +70, P_4 = +90$  og  $P_5 = -60$ , samt  $a_1 = 10, a_2 = 60, a_3 = 130, a_4 = 220$  og  $a_5 = 330$ , faar man

$$R = 50 - 30 + 70 + 90 - 60 = 120 \text{ kg}$$

og

$$x = \frac{50 \cdot 10 - 30 \cdot 60 + 70 \cdot 130 + 90 \cdot 220 - 60 \cdot 330}{120} = 65 \text{ cm.}$$

$x$  er her positiv, og Resultanten ligger altsaa til højre for  $F$  i Afstanden 65 cm derfra. Var  $x$  bleven negativ, maatte man have afsat Værdien for  $x$  fra  $F$  til venstre Side.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade til Bestemmelse af Resultantens Beliggenhed kan indses saaledes:

Det vil ikke forandre noget i Systemet af de virkende Kræfter, om man i  $F$  tilføjer to Kræfter af Størrelse  $P_1$ , men virkende i modsatte Retninger. Den ene af disse (her den opad virkende) vil med  $P_1$  gennem  $A$  danne et Kraftpar af Størrelse  $P_1 a_1$ , og den enkelte Kraft  $P_1$  gennem  $A$  er altsaa erstattet ved dette Kraftpar og en enkelt Kraft  $P_1$  virkende gennem  $F$ . Paa samme Maade

kan man erstatte de øvrige Kræfter ved Kraftpar af Størrelse henholdsvis  $P_2 a_2, P_3 a_3, P_4 a_4$  og  $P_5 a_5$  samt enkelte Kræfter af Størrelse  $P_2, P_3, P_4$  og  $P_5$ . De sidste virke gennem  $F$  og danne med  $P_1$  en Resultant  $R$  derigennem. Anbringer man nu i et Punkt  $G$ , som ligger i Linien  $EF$  i en endnu ubekendt Afstand  $x$  fra  $F$ , to ligestore Kræfter  $R$ , som virke i modsatte Retninger i en Linie, der er parallel med Kraftlinierne, vil den ene af disse to Kræfter  $R$  med  $R$  gennem  $F$  danne et Kraftpar, som vil ophæve den samlede Virkning af de fem Kraftpar  $P_1 a_1, P_2 a_2, P_3 a_3, P_4 a_4$  og  $P_5 a_5$ , naar blot Ligningen

$$R x = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + P_4 a_4 + P_5 a_5$$

er tilfredsstillet.

Ligger altsaa  $R$  i den Afstand  $x$ , som findes af denne Momentligning, vil Virkningen af samtlige Kraftpar være hævet, og tilbage bliver kun den gennem  $G$  virkende Kraft  $R$ , som saaledes bliver samtlige Kræfters Resultant.

Foranstaaende Fremgangsmaade anvendes tillige, naar man ved Beregning vil bestemme den samlede Virkning af flere Kræfter, som virke i forskellige Retninger, og som ikke skære hverandre i eet Punkt. Man opløser nemlig i saa Fald alle Kræfterne efter to paa hinanden vinkelrette Retninger og ikke som ved den grafiske Metode i vilkaarlige Retninger.

Skal man saaledes finde Resultanten af Kræfterne  $P_1, P_2, P_3$  og  $P_4$  (Fig. 23), der ere givne i Størrelse samt iøvrigt bestemte ved, 1) at skulle gaa gennem de med hverandre fast forbundne Punkter 1, 2, 3 og 4, hvis Beliggenhed er angiven ved deres Afstande fra to paa hinanden vinkelrette Linier  $OX$  og  $OY$ , nemlig:

Punkt 1 ved Afstanden  $x_1$  fra  $OY$  og Afstanden  $y_1$  fra  $OX$

— 2	—	$x_2$	—	—	$y_2$	—
— 3	—	$x_3$	—	—	$y_3$	—
— 4	—	$x_4$	—	—	$y_4$	—

( $x$ 'erne kaldes Punkternes Abscisser og regnes positive til højre for Ordinataksen  $OY$  og negative til venstre derfor, medens  $y$ 'erne kaldes Ordinatorer og regnes positive over Abscisseaksen  $OX$  og negative under den), og 2) ved deres Vinkler med  $OX$  og  $OY$  nemlig:

$P_1$  ved  $\angle u_1$  med  $OX$  og ved  $\angle v_1$  med  $OY$

$P_2$  —  $\angle u_2$  — —  $\angle v_2$  —

$P_3$  —  $\angle u_3$  — —  $\angle v_3$  —

$P_4$  —  $\angle u_4$  — —  $\angle v_4$  —,

saar opløser man hver Kraft for sig i dens Angrebepunkt efter de to Retninger  $OX$  og  $OY$ . Derved blive

$P_1$ 's Komposanter.  $X_1 = P_1 \cos u_1$  og  $Y_1 = P_1 \cos v_1$ ,

$P_2$ 's —  $X_2 = P_2 \cos u_2$  og  $Y_2 = P_2 \cos v_2$ ,

$P_3$ 's —  $X_3 = P_3 \cos u_3$  og  $Y_3 = P_3 \cos v_3$ ,

$P_4$ 's —  $X_4 = P_4 \cos u_4$  og  $Y_4 = P_4 \cos v_4$ .

De vandrette Komposanter faa en vandret Resultant

$$R_x = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

og de lodrette Komposanter en lodret Resultant

$$R_y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4.$$

Beliggenheden af  $R_x$  bestemmes derved, at dens Moment med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Planet, f. Eks.  $O$ , skal være lig med Summen af dens Komposanters Momenter med Hensyn til samme Punkt. Kaldes dens Afstand fra  $O$  for  $y$ , bestemmer man altsaa dens Beliggenhed ved Hjælp af Ligningen

$$R_x \cdot y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + X_4 y_4, \text{ hvoraf}$$

$$y = \frac{X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + X_4 y_4}{R_x}$$

Paa samme Maade finder man den Afstand  $x$ , hvori  $R_y$  ligger fra  $O$ , at være

$$x = \frac{Y_1 x_1 + Y_2 x_2 + Y_3 x_3 + Y_4 x_4}{R_y}$$

$R_x$  og  $R_y$ , som virke henholdsvis i en vandret og en lodret Linie, skære hinanden i det Punkt, der er bestemt ved Koordinaterne  $x$  og  $y$ , og herigennem maa altsaa deres Resultant  $R$  gaa. Størrelsen af denne, som saaledes bliver Resultanten af de fire givne Kræfter, beregnes af Ligningen

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2, \text{ hvoraf } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Dens Retning findes af

$$\cos u = \frac{R_x}{R} \text{ og } \cos v = \frac{R_y}{R},$$

naar  $u$  og  $v$  betegne  $R$ 's Vinkler med henholdsvis  $OX$  og  $OY$ .

De fundne Værdier for  $R$ ,  $u$  og  $v$  ere de samme, som man vilde faa, naar de fire givne Kræfter skar hverandre i eet Punkt.

Er enten  $R_x$  eller  $R_y$  Nul, vil den af dem, som ikke er Nul, i Størrelse være Resultanten af de givne Kræfter, medens dens Beliggenhed findes ved at sætte Summen af Momenterne af saavel de lodrette som de vandrette Komposanter lig med Resultantens Moment med Hensyn til Punktet  $O$ .

Ere baade  $R_x$  og  $R_y$  Nul, er der enten Ligevægt, eller Kræfterne erstattes af et Kraftpar. Ligevægt finder Sted, naar Summen af Momenterne af alle Komposanterne er

Nul med Hensyn til Punktet  $O$ . Er dette ikke Tilfældet, vil Størrelsen af Momentsummen netop angive Størrelsen af det Kraftpar, som erstatter de givne Kræfter.

De tre Betingelser for Ligevægt ere altsaa:

- 1) at Summen af Kræfternes vandrette Komposanter skal være Nul.
- 2) at Summen af Kræfternes lodrette Komposanter skal være Nul.
- 3) at Summen af alle Komposanternes Momenter med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Planet skal være Nul eller, hvad der er det samme, at Summen af selve Kræfternes Momenter skal være Nul,

thi en Krafts Moment er lig med Summen af dens Komposanternes Momenter med Hensyn til samme Punkt. Dette indses saaledes: Paa Fig. 24 er  $P$ 's Komposanter  $X$  og  $Y$ .  $O$ 's Afstande fra disse Kræfter og fra  $A$  ere henholdsvis  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $d$ .  $X$  danner  $\angle v$  med  $P$  og  $\angle u$  med  $AO$ . Da  $X = P \cos v$ ,  $Y = P \sin v$ ,  $b = d \sin u$ ,  $c = d \cos u$  og  $a = d \sin (v - u)$ , vil det vise sig, at  $Yc - Xb = Pa$ , naar de for de enkelte Størrelser fundne Værdier indsættes i denne Ligning.

I de forannævnte Ligninger maa saavel Kræfter som Momenter indsættes med deres respektive Fortegn.

Eksp. 13. I fem indbyrdes fast forbundne Punkter 1, 2, 3, 4 og 5, hvis Koordinater ere henholdsvis

$x_1 = 5$  cm;  $x_2 = 9$  cm;  $x_3 = 17$  cm;  $x_4 = 20$  cm;  $x_5 = 15$  cm;  
 $y_1 = 10$  cm;  $y_2 = 12$  cm;  $y_3 = 14$  cm;  $y_4 = 13$  cm;  $y_5 = 18$  cm,  
 virke fem Kræfter  $P_1 = 50$  kg,  $P_2 = 30$  kg,  $P_3 = 70$  kg,  
 $P_4 = 90$  kg og  $P_5 = 120$  kg, hvis Retninger ere bestemte ved  
 $u_1 = 70^\circ$ ;  $u_2 = 60^\circ$ ;  $u_3 = 120^\circ$ ;  $u_4 = 150^\circ$ ;  $u_5 = 90^\circ$ ;  
 $v_1 = 20^\circ$ ;  $v_2 = 150^\circ$ ;  $v_3 = 30^\circ$ ;  $v_4 = 120^\circ$ ;  $v_5 = 0^\circ$ .

Man skal finde Størrelse, Retning og Beliggenhed af de fem Kræfters Resultant.

$$X_1 = P_1 \cos u_1 = 50 \cos 70^\circ = + 17,10$$

$$X_2 = P_2 \cos u_2 = 30 \cos 60^\circ = + 15,00$$

$$X_3 = P_3 \cos u_3 = 70 \cos 120^\circ = - 35,00$$

$$X_4 = P_4 \cos u_4 = 90 \cos 150^\circ = - 77,94$$

$$X_5 = P_5 \cos u_5 = 120 \cos 90^\circ = 0,00$$

---


$$R_x = - 80,84$$

$$Y_1 = P_1 \cos v_1 = 50 \cos 20^\circ = + 46,99$$

$$Y_2 = P_2 \cos v_2 = 30 \cos 150^\circ = - 25,98$$

$$Y_3 = P_3 \cos v_3 = 70 \cos 30^\circ = + 60,62$$

$$Y_4 = P_4 \cos v_4 = 90 \cos 120^\circ = - 45,00$$

$$Y_5 = P_5 \cos v_5 = 120 \cos 0^\circ = + 120,00$$

---


$$R_y = + 156,63$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{80,84^2 + 156,63^2} = 176,3$$

$$\cos u = - \frac{80,84}{176,3}; u = 117,3^\circ (117^\circ 18')$$

$$\cos v = + \frac{156,63}{176,3}; v = 27,33^\circ (27^\circ 19' 48'')$$

$$y = \frac{X_1 \cdot y_1 + X_2 \cdot y_2 + X_3 \cdot y_3 + X_4 \cdot y_4 + X_5 \cdot y_5}{R_x}$$

$$= \frac{17,10 \cdot 10 + 15 \cdot 12 - 35 \cdot 14 - 77,94 \cdot 13 + 0 \cdot 18}{- 80,84}$$

$$= + 14,25 \text{ cm.}$$

$$x = \frac{Y_1 \cdot x_1 + Y_2 \cdot x_2 + Y_3 \cdot x_3 + Y_4 \cdot x_4 + Y_5 \cdot x_5}{R_y}$$

$$= \frac{46,99 \cdot 5 - 25,98 \cdot 9 + 60,62 \cdot 17 - 45 \cdot 20 + 120 \cdot 15}{156,68}$$

$$= + 12,33 \text{ cm.}$$

Ekspl. 14. Man skal finde Resultanten af Kræfterne  $P_1 = 4000 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 2000 \text{ kg}$ ,  $P_3 = 2000 \text{ kg}$  og  $P_4 = 1000 \text{ kg}$ , som angribe i Punkterne 1, 2, 3 og 4, der ere bestemte ved Koordinaterne

$$x_1 = + 3 \text{ m}; x_2 = + 2 \text{ m}; x_3 = - 1 \text{ m}; x_4 = - 2 \text{ m}$$

$$y_1 = + 1 \text{ m}; y_2 = - 1 \text{ m}; y_3 = - 3 \text{ m}; y_4 = + 2 \text{ m}$$

til to Akser, hvoraf den ene er vandret med positiv Retning til højre, den anden lodret med positiv Retning opad. Kræfternes Vinkler med disse Aksers positive Retninger ere

$$u_1 = 90^\circ; u_2 = 0^\circ; u_3 = 180^\circ; u_4 = 90^\circ;$$

$$v_1 = 0^\circ; v_2 = 90^\circ; v_3 = 90^\circ; v_4 = 180^\circ.$$

Man faar herefter

$$R_x = P_1 \cos u_1 + P_2 \cos u_2 + P_3 \cos u_3 + P_4 \cos u_4 = 0,$$

$$R_y = P_1 \cos v_1 + P_2 \cos v_2 + P_3 \cos v_3 + P_4 \cos v_4 = 3000,$$

$$\text{altsaa} \quad R = 3000 \text{ kg.}$$

Til Bestemmelse af Resultantens Beliggenhed opstilles Momentligningen med Hensyn til Koordinaternes Begyndelsespunkt, og man maa i dette Eksempel, hvor  $R_x = 0$ , tage Summen af samtlige Komposanters Mo-

menter. Regnes den ved Kraften  $P_1$ 's Moment bestemte Omdrejningsretning for positiv, faar man

$$R \cdot x = 4000 \cdot 3 + 2000 \cdot 1 - 2000 \cdot 3 + 1000 \cdot 2 = 10000.$$

$$\text{Da } R = 3000, \text{ bliver } x = \frac{10}{3}.$$

Da Momentet 10000 kgm er positivt og  $R$  virker opad, maa  $x$  afsættes fra Begyndelsespunktet henad Abscisseaksen til højre, hvorved  $R$ 's Beliggenhed er bestemt.

Parallele Kræfters Sammensætning, som i det foregaaende er nærmere omtalt i Ekspl. 12, finder bl. a. Anvendelse ved Bestemmelsen af Liniers og Fladers Tyngdepunkt.

Forinden mere indviklede Tilfælde behandles, skal Beliggenheden af Tyngdepunkterne i simple Linie- og Arealformer findes, idet man skal minde om, at Tyngdepunktet er det Punkt, hvorom vedkommende Linie, Flade eller Legeme vil være i Ligevægt i en hvilken som helst Stilling, og hvorigennem altsaa Liniens, Fladens eller Legemets Størrelse kan tænkes virkende som en Kraft. Kan man gennem vedkommende Linie eller Areal, hvis Tyngdepunkt skal findes, lægge en Linie, som deler Linien eller Arealet symmetrisk, ligger Tyngdepunktet i denne Linie, som kaldes en Symmetrilinie. Findes der to Symmetrilinier, bliver disses Skæringspunkt Figurens Tyngdepunkt.

En ret Liniens Tyngdepunkt er dens Midtpunkt.

En brudt Liniens Tyngdepunkt findes ved Kraftpolygon og Stangpolygon, som vist paa Fig. 25, idet man tænker sig de enkelte Siders Længder virkende som Kræfter i Sidernes Midtpunkter, først lodret og dernæst vandret. I Stedet for at tegne to Kraftpolygoner, en for hver af disse Kraftretninger, tegner man kun een, som sammen med Polstraalerne tænkes drejet  $90^\circ$ . Siderne i Stang-



polygonen  $I' II' III' IV' V'$  ville da blive vinkelrette paa de tilsvarende i Stangpolygonen  $I II III IV V$ . De to Resultantlinier ere  $R$  og  $R'$ , og deres Skæringspunkt  $T$  det søgte Tyngdepunkt.

Den paa Fig. 26 viste brudte Linie er en Del af en regelmæssig Mangekants Omkreds. Da den brudte Linie deles i to symmetriske Halvdele ved Linien  $OD$ , maa Tyngdepunktet ligge i denne. Dets Afstand fra Centrum  $O$  for den indskrevne Cirkel findes som fjerde Proportional til de tre Størrelser  $b$ ,  $k$  og  $r$ , der betegne henholdsvis den brudte Linies Længde, dens Projektion paa Linien  $MN$ , der er vinkelret paa  $OD$ , og Radius til den i den brudte Linie indskrevne Cirkel. Proportionen bliver

$$\frac{b}{k} = \frac{r}{x} \quad (1)$$

Kaldes nemlig de enkelte Sider i Mangekanten  $s$  og deres Projektioner paa  $AG$  henholdsvis  $s_1, s_2, s_3, s_4 \dots$  samt Afstandene fra Sidernes Midtpunkter til  $MN$  for  $h_1, h_2, h_3, h_4 \dots$ , har man, idet  $\triangle BCH \sim \triangle JOL$ ,

$$\frac{s}{s_2} = \frac{r}{h_2} \text{ eller } s h_2 = r s_2.$$

Paa lignende Maade findes

$$s h_1 = r s_1; \quad s h_3 = r s_3; \quad s h_4 = r s_4; \quad \text{o. s. v.}$$

Adderes alle disse Ligninger, faar man

$$s h_1 + s h_2 + s h_3 + s h_4 + \dots = r s_1 + r s_2 + r s_3 + r s_4 + \dots$$

Venstre Side af denne Ligning er Summen af de enkelte Siders Momenter med Hensyn til  $O$ , naar Siderne tænkes virkende som Kræfter i vandret Retning. Denne Moment-sum kan da erstattes ved den brudte Linies Moment, der

er  $b \cdot x$ , naar  $x$  er Tyngdepunktets Afstand fra  $O$ . Ligningen bliver derved til

$$b x = r (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \dots) = r k$$

eller 
$$\frac{b}{k} = \frac{r}{x}.$$

Konstruktionen kan nu udføres saaledes (Fig. 27): Fra  $O$  afsættes henad  $OD$  Stykket  $OR = r$ ; i  $R$  oprejses en Linie  $PR$  vinkelret paa  $OD$ . Om  $O$  som Centrum slaas med  $b$  som Radius en Cirkelbue til Skæring med  $PR$ . Skæringspunktet  $P$  forbindes med  $O$  og henad  $OP$  afsættes  $OK = k$ . Linien  $KT$  tegnes parallel med  $PR$ , og  $T$  er da det søgte Tyngdepunkt. Af de ligedannede Trekanter  $OTK$  og  $ORP$  faar man nemlig

$$\frac{OP}{OK} = \frac{OR}{OT} \text{ eller } \frac{b}{k} = \frac{r}{x}.$$

En Cirkelbues Tyngdepunkt kan findes ved samme Proportion, kun at  $b$  da betyder Cirkelbuens Længde,  $r$  Cirkelens Radius og  $k$  Korden mellem Cirkelbuens Endepunkter, som vist paa Fig. 28. Det er ofte bekvemt eller nødvendigt f. Eks., naar Buens Længde er mindre end Radius, at benytte et Multiplum af Buens Længde i Stedet for selve Længden, men man maa da samtidig bruge det samme Multiplum af Kordens Længde.

Kender man Buens Radius  $r$  og dens Centervinkel  $v$ , kan Tyngdepunktets Afstand  $x$  fra  $O$  findes af ovenangivne

Ligning, hvoraf 
$$x = \frac{kr}{b},$$

naar deri indsættes

$$k = 2r \sin \frac{v}{2} \text{ og } b = \frac{\pi r v}{180},$$

hvorved

$$x = \frac{2r^2 \sin \frac{v}{2}}{\left(\frac{\pi r v}{180}\right)} = \frac{360 r \sin \frac{v}{2}}{\pi v}$$

Kender man i Stedet for Radius og Centervinklen enten Radius og Korden eller Korden og Centervinklen, vil Buens Tyngdepunkt ogsaa let kunne findes ved Ligning (1).

Eksp. 15. Hvorlangt fra Centrum ligger Tyngdepunktet i en Cirkelbue, hvis Radius er 12 cm og hvis Korde er 15 cm?

Centervinklen  $v$  findes af

$$\sin \frac{1}{2} v = \frac{h}{2r} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} v = 38,68^\circ; \quad v = 77,36^\circ;$$

$$b = \frac{\pi r v}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 12 \cdot 77,36^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 77,36^\circ}{15^\circ} = 16,19 \text{ cm.}$$

$$x = \frac{12 \cdot 15}{16,19} = 11,12 \text{ cm.}$$

Vil man bestemme Tyngdepunktet for en vilkaarlig krum Linie, maa man dele den i Stykker saa smaa, at de kunne betragtes som Cirkelbuer eller rette Linier. Tyngdepunkterne for de enkelte Dele findes først, og derefter bestemmes hele den krumme Lignes Tyngdepunkt ved samme Fremgangsmaade, som foran er angiven til Bestemmelse af den brudte Lignes Tyngdepunkt.

Trekantens Tyngdepunkt er Medianernes Skæringspunkt. I dette Punkt dele de hverandre i to Stykker, af hvilke det mindste er Halvdelen af det største. Antages  $\triangle ABC$  (Fig. 29) ved Linier parallelle med  $AC$  delt i ganske smalle Strimler, ville disses Tyngdepunkter alle ligge i Medianen  $BD$ ; ved samme Betragtning indses det, at Tyngdepunktet ogsaa maa ligge i  $AE$ , altsaa i Skæringspunktet  $T$  mellem  $BD$  og  $AE$ .

Parallelogrammets Tyngdepunkt er Skæringspunktet mellem Diagonalerne, da disse hver for sig dele det i to kongruente Trekanter, hvis Tyngdepunkter ligge i lige store Afstande fra vedkommende Diagonal.

Trapezets Tyngdepunkt  $T$  maa dels ligge i den Linie  $EF$  (se Fig. 30), der forbinder Midtpunkterne af  $AB$  og  $CD$ , idet Trapezet ligesom Trekanten kan tænkes delt i smalle Strimler ved Linier parallelle med de to parallelle Sider, dels i Forbindelseslinien mellem  $\triangle ABD$ 's og  $\triangle DBC$ 's Tyngdepunkter  $T_1$  og  $T_2$ . Tyngdepunktet  $T$  bliver da Skæringspunktet mellem disse to Linier. En anden og noget lettere Maade at finde dette Tyngdepunkt paa, er vist paa Fig. 31, hvor  $BH \neq DC$  og  $GD \neq AB$ .  $T$  er Skæringspunktet mellem  $\underline{GH}$  og Linien  $\underline{EF}$ , som forbinder Midtpunkterne af  $AB$  og  $DC$ .

Naar Trapezets parallelle Sider kaldes  $a$  og  $b$  samt dets Højde  $h$ , og Tyngdepunktets Afstand fra  $CD$  betegnes ved  $x$ , har man, da  $\triangle GTF \sim \triangle EHT$ ,

$$\frac{x}{h-x} = \frac{b + \frac{1}{2}a}{a + \frac{1}{2}b} \quad \text{hvoraf } x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2b+a}{b+a}$$

Polygonens Tyngdepunkt. Ved Diagonaler fra en Vinkelspids deles Polygonen i Trekanter, hvis Arealer og Tyngdepunkter først findes. Dernæst anbringer man Kræfter proportionale med Arealerne i de respektive

Tyngdepunkter virkende først lodret og derefter vandret, hvorpaa det fælles Tyngdepunkt (Polygonens Tyngdepunkt) bestemmes ved Kraftpolygon og Stangpolygon paa samme Maade som den brudte Linies Tyngdepunkt.

Ved mere indviklede Arealformer maa man gaa frem paa samme Maade, idet de deles i Arealer, hvis Størrelser og Tyngdepunkter let kunne findes.

Ekspl. 16. Bestem ad grafisk Vej Tyngdepunktet for en uregelmæssig Femkant, hvis Vinkelspidser ere angivne ved Koordinaterne:

$$x_1 = 2 \text{ m}; x_2 = 10 \text{ m}; x_3 = 18 \text{ m}; x_4 = 16 \text{ m}; x_5 = 8 \text{ m}; \\ y_1 = 10 \text{ m}; y_2 = 14 \text{ m}; y_3 = 12 \text{ m}; y_4 = 6 \text{ m}; y_5 = 2 \text{ m}.$$

Ekspl. 17. Find Tyngdepunktets Beliggenhed i det paa Fig. 32 viste Tværnsnit af et Vinkeljærn.

Ved den punkterede Linie deles Arealet i to Rektangler, det ene paa  $800 \text{ mm}^2$  og det andet paa  $1100 \text{ mm}^2$ .

Gøres  $O$  til Momentpunkt, finder man først Tyngdepunktets Afstand  $y$  fra den vandrette Linie  $OA$  ved Momentligningen:

$$800 \cdot 5 + 1100 \cdot 65 = (800 + 1100) y,$$

hvoraf  $y = 39,7 \text{ mm},$

og dernæst dets Afstand  $x$  fra den lodrette Linie  $OB$  ved

$$800 \cdot 40 + 1100 \cdot 5 = (800 + 1100) x,$$

hvoraf  $x = 19,7 \text{ mm}.$

I den første Ligning er Kraftretningen forudsat vandret, i den sidste lodret.

### Cirkeludsnittets Tyngdepunkt.

Ethvert Cirkeludsnit kan ved Radier deles i et vilkaarligt Antal ligestore smaa Cirkeludsnit, der kunne betragtes som Trekanter, hvis Tyngdepunkter alle ligge i en Afstand fra Cirkelens Centrum af  $\frac{2}{3} r$ , idet  $r$  er Cirkelens Radius, altsaa i en Cirkelbue med Radius  $\frac{2}{3} r$ . Cirkeludsnittets Tyngdepunkt maa følgelig være det samme som Tyngdepunktet af denne Bue. Hvorledes dette findes, er tidligere vist.

Konstruktionen er angiven paa Fig. 33.

$$CM = \frac{2}{3} CD; CK = \sphericalangle ADB; CL = AB;$$

$KM$  og  $TL \perp CD$ .  $T$  er det søgte Tyngdepunkt.

### Cirkelafsnittets Tyngdepunkt.

Da Cirkelafsnittet kan deles symmetrisk af en Radius, vil dets Tyngdepunkt komme til at ligge i denne Radius, men det maa ogsaa ligge i en anden ret Linie, der kan findes paa følgende Maade:

Cirkelafsnittet er Differensen mellem et Cirkeludsnit og en Trekant. Disse Arealer tænker man sig virkende som Kræfter i deres respektive Tyngdepunkter vinkelret paa den omtalte Symmetriradius, men i modsatte Retninger. Beliggenheden af disse Kræfters Resultant, hvis Størrelse er deres Differens, altsaa Cirkelafsnittets Areal, bestemmes derefter enten grafisk ved Kraftpolygon og Stangpolygon eller ad Beregningens Vej derved, at man opstiller Momentligningen f. Eks. med Hensyn til Centrum for Cirkelbuen som Momentpunkt. Hvor denne Resultantlinie skærer Symmetriradien, findes Tyngdepunktet.

Ekspl. 18. Bestem Tyngdepunktet af et Cirkelafsnit, hvis Radius er  $36 \text{ cm}$  og hvis Korde er  $44 \text{ cm}$ . Centervinklen er mindre end  $180^\circ$  (Fig. 34).

$$\sin v = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}, \quad v = 37,67^\circ.$$

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= \frac{\pi r \cdot 2v}{180} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 37,67^\circ}{90^\circ} = \frac{2\pi \cdot 37,67}{5} \\ &= 47,33 \text{ cm;} \end{aligned}$$

$$CD = \sqrt{36^2 - 22^2} = 28,49 \text{ cm};$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 28,49 = 626,9 \text{ cm}^2;$$

$$\text{Udsnit } A E B C = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 47,33 = 852,2 \text{ cm}^2;$$

$$\text{Afsnit } A E B D = 225,2 \text{ cm}^2.$$

Betegne  $T_1$  og  $T_2$  henholdsvis Udsnittets og Trekantens Tyngdepunkter, har man ifølge Ligning (1) (se S. 30)

$$CT_1 = \frac{2}{3} \cdot 36 \cdot \frac{44}{47,33} = 22,30 \text{ cm},$$

$$CT_2 = \frac{2}{3} \cdot 28,49 = 19,00 \text{ cm}.$$

Momentligningen med Hensyn til  $C$  bliver

$$852,2 \cdot 22,30 - 626,9 \cdot 19,00 = x \cdot 225,2,$$

hvoraf

$$CT = x = 31,48 \text{ cm}.$$

Tyngdepunktet for et af to Radier begrænset Stykke af en Cirkelring bestemmes paa lignende Maade, da dette Areal er Differensen mellem to Cirkeludsnit.

Endnu skal i Forbindelse med det foregaaende omtales, hvorledes man tilnærmelsesvis ved Beregning kan bestemme Tyngdepunktet af et vilkaarligt Areal.

Hertil benyttes den saakaldte „Simpsons Formel“.

Fig. 35 viser et Areal begrænset af to parallelle rette Linier og to krumme Linier.

Der anbringes to paa hinanden vinkelrette Akser, af hvilke  $Y$ -Aksen falder sammen med en af de rette Begrænsningslinier. Afstanden mellem disse Begrænsningslinier deles i et lige Antal lige store Dele, her otte, og gennem Delingspunkterne tegnes Linier parallelle med  $Y$ -Aksen. De Stykker af disse Linier, som afskæres indenfor Arealets Omkreds, ere betegnede ved henholdsvis  $a_0, a_1, a_2 \dots a_8$ , medens Afstanden mellem dem er kaldt  $m$ . Arealet er da ifølge „Simpsons Formel“

$$A = \frac{m}{3} (a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 2a_6 + 4a_7 + a_8). \quad (2)$$

Er ingen Del af Arealets Omkreds retliniet, blive  $a_0$  og  $a_8$  begge 0.

Har Omkredsen skarpe Knæk eller stærke Krumninger, foretrækker man for Nøjagtighedens Skyld at dele Arealet i flere andre ved parallelle Linier paa disse Steder og derefter beregne hvert Areal for sig ved „Simpsons Formel“.  $m$  vil i saa Fald sandsynligvis have forskellige Værdier ved de forskellige Arealer, hvori det oprindelige Areal er delt.

Kaldes Tyngdepunktets  $X$ -Koordinat  $x$ , findes den af Ligningen

$$\begin{aligned} A \cdot x &= \frac{m}{3} (a_0 \cdot 0 \cdot m + 4a_1 \cdot 1 \cdot m + 2a_2 \cdot 2 \cdot m + 4a_3 \cdot 3 \cdot m \\ &+ 2a_4 \cdot 4 \cdot m + 4a_5 \cdot 5 \cdot m + 2a_6 \cdot 6 \cdot m + 4a_7 \cdot 7 \cdot m + a_8 \cdot 8 \cdot m) \end{aligned}$$

at være

$$x = \frac{m(a_0 \cdot 0 + 4a_1 \cdot 1 + 2a_2 \cdot 2 + 4a_3 \cdot 3 + 2a_4 \cdot 4 + 4a_5 \cdot 5 + 2a_6 \cdot 6 + 4a_7 \cdot 7 + a_8 \cdot 8)}{a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 2a_6 + 4a_7 + a_8} \quad (3)$$

medens Y-Koordinaten  $y$  findes af Ligningen

$$A \cdot y = \frac{m}{3} (a_0 \cdot y_0 + 4a_1 \cdot y_1 + 2a_2 \cdot y_2 + 4a_3 \cdot y_3 + 2a_4 \cdot y_4 + 4a_5 \cdot y_5 + 2a_6 \cdot y_6 + 4a_7 \cdot y_7 + a_8 \cdot y_8),$$

hvor  $y_0, y_1, y_2 \dots$  ere Afstandene fra X-Aksen til Midtpunkterne af henholdsvis  $a_0, a_1, a_2$  o. s. v., at være

$$y = \frac{a_0 y_0 + 4a_1 y_1 + 2a_2 y_2 + 4a_3 y_3 + 2a_4 y_4 + 4a_5 y_5 + 2a_6 y_6 + 4a_7 y_7 + a_8 y_8}{a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5 + 2a_6 + 4a_7 + a_8} \quad (4)$$

Eksp. 19. Er  $a_0 = 6,0$  mm,  $a_1 = 21,8$  mm,  $a_2 = 24,0$  mm,  $a_3 = 25,0$  mm,  $a_4 = 25,0$  mm,  $a_5 = 25,4$  mm,  $a_6 = 23,4$  mm,  $a_7 = 16,8$  mm,  $a_8 = 6,2$  mm,  $m = 6$  mm,

kan Beregningen skematisk udføres saaledes:

$a_0 = 6,0$	1	6,0	0	0,0	$y_0 = 19,4$	6,0	116,40
$a_1 = 21,8$	4	87,2	1	87,2	$y_1 = 18,9$	87,2	1648,08
$a_2 = 24,0$	2	48,0	2	96,0	$y_2 = 18,6$	48,0	892,80
$a_3 = 25,0$	4	100,0	3	300,0	$y_3 = 19,2$	100,0	1920,00
$a_4 = 25,0$	2	50,0	4	200,0	$y_4 = 19,4$	50,0	970,00
$a_5 = 25,4$	4	101,6	5	508,0	$y_5 = 19,8$	101,6	2011,68
$a_6 = 23,4$	2	46,8	6	280,8	$y_6 = 19,8$	46,8	926,64
$a_7 = 16,8$	4	67,2	7	470,4	$y_7 = 19,8$	67,2	1330,56
$a_8 = 6,2$	1	6,2	8	49,6	$y_8 = 20,2$	6,2	125,24
		513,0		1992,0		513,0	9941,40

$$x = m \cdot \frac{1992}{513} = 6 \cdot \frac{1992}{513} = 23,8 \text{ mm}; \quad y = \frac{9941,4}{513} = 19,4 \text{ mm};$$

$$A = \frac{m}{3} \cdot 513 = 1026 \text{ mm}^2.$$

Et noget nøjagtigere Resultat vilde selvfølgelig være opnaaet, ifald man havde behandlet Arealerne mellem  $a_0$  og  $a_1$  samt mellem  $a_7$  og  $a_8$  hvert for sig efter „Simpsons Formel“ ved her at dele  $m$  i f. Eks. seks ligestore Dele.

## 2. Understøtningspunkter og disses Modstande.

Naar et System af givne Kræfter ikke er i Ligevægt, vil en Bevægelse af Systemet finde Sted, hvis der ikke ydes tilstrækkelig Modstand herimod i eet eller flere Punkter. Disse Punkter, der kaldes Understøtningspunkter, kunne enten være simple Understøtningspunkter, Omdrejningspunkter eller Indspændinger. De Modstande eller, som de ogsaa kaldes, Reaktionen, som Understøtningspunkterne yde, ere selv Kræfter.

De simple Understøtningspunkter kunne kun yde Modstand mod Tryk og kun i een bestemt Retning, nemlig vinkelret paa den understøttende Flade, medens Omdrejningspunkter kunne gøre Modstand i alle Retninger saavel mod Tryk som mod Træk. Indspændinger kunne yde Modstand i alle Retninger og tillige modsætte sig en Drejning af Systemet.

Er der eet Understøtningspunkt, vil Betingelsen for Ligevægt være, at Resultanten af de givne Kræfter gaar gennem dette Punkt. Det kan være et simpelt Understøtningspunkt, naar Resultantens Linie virker vinkelret ind imod den understøttende Flade, men ellers maa det være et Omdrejningspunkt. Gaar Resultanten ikke gennem Understøtningspunktet, vil Modstanden vel være lige saa stor som Resultanten af Kræfterne og modsat denne, men den vil virke i en med Resultanten parallel Linie, hvorved Resultant og Modstand komme til at danne et Kraftpar, hvorfor Understøtningen maa være en Indspænding.

Har Konstruktionen to Understøtningspunkter, kunne disse enten være simple Understøtningspunkter eller

det ene af dem kan være et Omdrejningspunkt eller en Indspænding, eller de kunne begge være Omdrejningspunkter eller Indspændinger. Betingelsen for Ligevægt vil i de tre første Tilfælde være, at de to Modstande og Resultanten af de givne Kræfter skære hverandre i eet Punkt, og derved kunne Modstandene bestemmes. Denne Betingelse vil altid være opfyldt, naar begge Understøtningspunkter ere Omdrejningspunkter, Indspændinger, eller Kombination af disse 2 Slags Understøtninger, men man vil i dette Tilfælde ikke kunne vide noget om Retningen for de Modstande, som de yde, da de begge kunne gøre Modstand i alle mulige Retninger. Blandt andet bør af denne Grund, naar der haves flere Understøtningspunkter, kun eet af dem være et Omdrejningspunkt og de andre simple Understøtningspunkter. Indspændinger anvendes sædvanlig kun, naar der kun anvendes een Understøtning.

Ekspl. 20. En Obelisk (Fig. 36) af Vægt  $P_1$  skal ved Drejning om  $A$  rejses paa sin Sokkel ved Anvendelse af Kraften  $P_2$  i Obeliskens Top, idet Glidning forhindres ved Hjælp af en Kraft  $P_3$  i  $A$ .  $P_1$ 's og  $P_3$ 's Størrelser samt  $P_2$ 's Retning ere bekendte, medens  $P_2$ 's Størrelse og  $P_3$ 's Retning skulle findes.

Kræfterne  $P_1$ , gennem Obeliskens Tyngdepunkt  $T$ , og  $P_2$  skære hinanden i  $B$ , og Reaktionen fra Understøtningen  $A$  maa saaledes virke efter  $AB$ . Paa Fig. 36  $b$  angiver Trekanten  $012$ , hvis Sider ere parallelle med henholdsvis  $P_1$ ,  $P_2$  og  $AB$ , Ligevægten mellem de to nævnte Kræfter og Reaktionen. Den sidste  $\overline{20}$  er derpaa opløst i to Komposanter, den ene lodret og den anden af Størrelse  $P_3$ . Cirkelbuen med Radius  $\overline{03} = P_3$  skærer den lodrette Linie gennem  $2$  i Punkterne  $3$  og  $3'$ , og man faar saaledes to Løsninger. Resultatet bliver, at man, foruden gennem  $C$  at virke med et Træk  $P_2$  af Størrelse og

Retning  $\overline{12}$ , tillige maa virke gennem  $A$  enten med en Kraft  $P_3$  af Størrelse og Retning  $\overline{30}$  eller med  $P_3'$ , hvis Størrelse og Retning er  $\overline{3'0}$ . Fundamentet modtager i begge Tilfælde et lodret Tryk, hvis Størrelse er henholdsvis  $\overline{32}$  og  $\overline{3'2}$ , og det maa altsaa kunne yde en Modstand lodret opad af samme Størrelse.

Ekspl. 21. En Svingkran, som vist paa Fig. 37, er støttet i Sporlejet  $A$  og ved Halselejet  $B$ . Kranens Egenvægt er  $P_1$  og Byrden  $P_2$ . Modstandene i  $A$  og  $B$  skulle findes.

Det vil være nødvendigt først at kende Beliggenheden af Resultanten af  $P_1$  og  $P_2$ ; denne er funden paa sædvanlig Maade ved Kraftpolygon og Stangpolygon og er i Beliggenhed angiven ved  $P_3$ , medens dens Størrelse er  $\overline{02}$ . Da Modstanden  $P_4$  gennem  $B$  kun kan være vandret, maa Modstanden  $P_5$  gennem  $A$  virke i Linien  $AC$ . Ligevægten mellem  $P_3$  og disse to Modstande er angiven ved  $\triangle 024$ , hvor  $\overline{24}$  og  $\overline{40}$  angive Størrelse og Retning af henholdsvis  $P_4$  og  $P_5$ .  $P_5$  ( $\overline{40}$ ) er atter opløst i Komposanterne  $P_6$  ( $\overline{46}$ ) og  $P_7$  ( $\overline{60}$ ), hvoraf ses, at Fundamentet, foruden i  $A$  at optage den samlede Vægt af Kran og Byrde, tillige maa kunne hindre, at Kraftparret  $P_3, P_6$  vælter Kranen. (Modstanden mod Væltning er netop udtrykt ved Kraftparret  $P_4, P_7$ , som er lige stort med, men modsat  $P_3, P_6$ ).

Ekspl. 22. Fig. 38 viser en Svingkran, som bestaar af en faststaaende Stamme og en herom drejelig Del, der ved  $A$  er ophængt paa en Tap, medens den ved  $B$  gennem en konisk Rulle støtter sig til den nederste Del af Stammen, der er tildannet som en Keglestub. Vægten af den bevægelige Del af Kranen er  $P_1$  og Byrden er  $P_2$ . Modstandene ønskes bestemte.

$P_1$  og  $P_2$  ere sammensatte til Resultanten  $P_3$ , der skal holde Ligevægt med Modstandene  $P_4$  gennem  $A$  og

$P_5$  gennem  $B$ . Tages der ikke Hensyn til Gnidningsmodstanden, vil  $P_5$  virke vinkelret paa den Frembringer, efter hvilken Keglefladerne berøre hinanden, og  $P_4$ 's Beliggenhed vil da være bestemt derved, at den skal gaa gennem  $A$  og Skæringspunktet  $C$  mellem  $P_3$  og  $P_5$ .

$P_4$ 's og  $P_5$ 's Størrelser ere fundne paa Fig. 38<sup>b</sup> som  $\overline{24}$  og  $\overline{40}$ . Fremdeles er  $P_4$  ( $\overline{24}$ ) opløst i  $P_8$  ( $\overline{28}$ ) og  $P_9$  ( $\overline{84}$ ), medens  $P_5$  ( $\overline{40}$ ) er opløst i  $P_6$  ( $\overline{46}$ ) og  $P_7$  ( $\overline{60}$ ). Den samlede Vægt af den bevægelige Del af Kranen og af Byrden optages altsaa dels gennem Tappen ved  $A$  og dels af Keglefladen i  $B$ , hvorhos der ved Kranstammens Befæstelse maa kunne tilvejebringes et Kraftpar i det mindste af Størrelse  $P_7, P_8$ , for at Kranen ikke skal vælte.

Lader man Frembringerne i Keglefladen danne en meget stor Vinkel med Stammens Midtlinie (Aksen), vil det Tilfælde kunne indtræde, at Punktet  $C$  kommer til at ligge højere end  $A$ . I saa Fald vil  $P_4$  virke fra højre Side nedad mod venstre, og dens Komposant  $P_9$ 's Retning bliver lodret nedad. Kranens bevægelige Del vil da have Tilbøjelighed til at løfte sig af Tappen ved  $A$ , hvilket maa forhindres ved Taplejets Konstruktion. Det samme vil kunne indtræffe ved en Forøgelse af Byrden, hvorfor man ogsaa af denne Grund altid bør undersøge Forholdene med den størst mulige Byrde for Øje.

### 3. Bjælker og Aksler.

Bjælker ere i Almindelighed prismatiske Legemer, der forekomme saavel i Bygnings- som Maskinkonstruktioner, medens Akslerne i Regelen ere Omdrejningslegemer, og de anvendes kun i Maskinkonstruktioner. Saavel Akslerne som Bjælkerne maa understøttes mindst i to Punkter, medens de iøvrigt paavirkes af en eller flere Kræfter. Ligge Understøtningspunkterne nær ved hinanden i Bjælkens ene Ende, medens Bjælken kun paavirkes af ydre Kræfter

paa Stykket mellem Bjælkens anden Ende, den saakaldte frie Ende, og det Understøtningspunkt, som er denne nærmest, og er Bjælken iøvrigt fastgjort i sin Stilling, saaledes at den ikke kan bevæges i nogen Retning, siges den at være indspændt i den ene Ende (se Side 39). Paa samme Maade kunne Aksler ogsaa være understøttede, men her kan der selvfølgelig ikke være Tale om nogen Befæstelse, da det netop er Meningen, at Akslerne skulle kunne dreje sig frit, og Betegnelsen Indspænding bruges derfor ikke for Akslers Vedkommende.

Som allerede tidligere omtalt, vil det være nødvendigt, at disse Understøtningspunkter yde Modstande eller Reaktionen af bestemt Størrelse og Retning, da ellers Bjælken (Akslen), tilligemed de paa den virkende ydre Kræfter, vil bevæge sig. Størrelsen af Reaktionen findes overensstemmende med de i det foregaaende anførte Regler. Tænker man sig nemlig disse Reaktionen anbragte i Understøtningspunkterne som ydre Kræfter, hver med sin bestemte Størrelse og Retning, skulle de være i Ligevægt med de givne ydre Kræfter  $\therefore$  de 3 Ligevægtsligninger (se Side 26) skulle være tilfredsstillende, og man kan saaledes ganske se bort fra Understøtningerne selv, medens man beskæftiger sig med Bjælkens (Akslens) Beregning. I Styrkelæren vil det blive paavist, hvorledes man kan finde Konstruktionsdeles Tværnsnitsdimensioner, naar de paavirkes paa visse simple Maader, nemlig enten efter Konstruktionsdelens geometriske Akse (den Linie, som forbinder Tværnsnittenes Tyngdepunkter), hvorved Paavirkningerne ville søge at forlænge eller forkorte Legemet, eller tværs paa Legemets Akse, hvorved de dels ville søge at forskyde umiddelbart opad hinanden liggende Tværnsnit i Forhold til hinanden, dels søge at give Legemet en fra den oprindelige afvigende Form f. Eks. give et lige Legeme en krum Form, i hvilket Tilfælde man siger, at Legemet bøjes.

*Aksler - 1880*

I indeværende Afsnit skal det nu blive paavist, hvorledes man altid kan reducere Virkningen af hvilket som helst paa Bjælker og Aksler virkende ydre Kræfter til en eller flere af de ovenfor nævnte simple Paavirkninger.\*)

a) *Konstruktionsdelen paavirkes af Kræfter, som ligge i Plan indbyrdes og med dens Akse.*

Fig. 39 viser en vandret liggende Bjælke, som er understøttet i Punkterne  $A$  og  $B$ , hvis indbyrdes Afstand er  $l$ , medens den paavirkes af de lodrette Kræfter  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$ . • Disses Angrebepunkter  $C$ ,  $D$  og  $E$  ligge i Afstande fra  $A$  af henholdsvis  $l_1$ ,  $l_2$  og  $l_3$ .

Reaktionerne i  $A$  og  $B$  betegnes ved henholdsvis  $R_1$  og  $R_2$ , og deres Størrelse kan findes ved Opstilling af Ligevægtsbetingelserne. Den første af disse falder bort, da samtlige givne Kræfter have deres vandrette Komposanter lig med Nul; derimod vil den anden af dem, der udsiger, at Summen af de lodrette Komposanter skal være Nul, give Ligningen

$$R_1 + R_2 + P_1 + P_2 + P_3 = 0. \quad (5)$$

Ved den tredje Ligevægtsligning, som angiver, at Summen af Kræfternes Momenter med Hensyn til et hvilket som helst Punkt skal være Nul, faar man, naar  $A$  vælges til Momentpunkt,

$$R_2 l + P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3 = 0,$$

hvoraf 
$$R_2 = -\frac{P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_3 l_3}{l}. \quad (6)$$

Ved Indsættelse af Værdien for  $R_2$  i Ligning (5) findes  $R_1$ .

$R_1$  kan ogsaa findes direkte ved Momentligningen for  $B$  som Momentpunkt, og Ligning (5) kan i saa Fald bruges

\*) Anm.: I Tabel X er der angivet, hvilke Belastninger der i forskellige Tilfælde kunne antages at virke paa Bjælker, som indgaa i Etageadskillelser.

til Prøve paa Regningens Rigtighed. Tilføjes nu  $R_1$  og  $R_2$  som ydre Kræfter, er hele Systemet af Kræfter i Ligevægt. Af Hensyn til Bestemmelsen af Konstruktionsdelens Tværsnitsdimensioner kan det, saaledes som det nærmere vil ses af Styrkelæren, være ønskeligt for et hvilket som helst Tværnit at kende dels Summen af samtlige til den ene Side af Tværnittet virkende Kræfter — denne Sum kaldes Forskydningen —, dels Summen af Momenterne af alle de samme Kræfter med Hensyn til et Punkt (Tyngdepunktet) i vedkommende Tværnit — denne Sum kaldes Bøjningsmomentet med Hensyn til Tværnittet.

At Virkningen af alle de Kræfter, som ligge til den ene Side for et Tværnit, netop vil reducere sig til en Sum af Kræfter gennem Tværnittet og en Sum af Kræfternes Momenter med Hensyn til et Punkt i dette Tværnit, indses saaledes: Betragter man f. Eks. et Tværnit  $G$  beliggende mellem  $D$  og  $E$  (Fig. 39), kan man, uden at der indtræder nogen Forstyrrelse i Ligevægten mellem de givne ydre Kræfter, i  $G$  tilføje to Kræfter af Størrelse  $R_1$ , den ene virkende lodret opad, den anden lodret nedad. Den sidste af disse vil i Forbindelse med  $R_1$  gennem  $A$  danne et Kraftpar  $R_1 x$ , hvor  $x$  er  $G$ 's Afstand fra  $A$ .  $R_1$  i  $A$  er saaledes erstattet af Momentet  $R_1 x$  og  $R_1$  gennem  $G$ . Paa samme Maade kan man indse, at  $P_1$  kan erstattes af Momentet  $P_1 (x - l_1)$  og den enkelte Kraft  $P_1$  gennem  $G$  og endelig  $P_2$  af Momentet  $P_2 (x - l_2)$  og Kraften  $P_2$  gennem  $G$ . Den samlede Virkning af  $R_1$ ,  $P_1$  og  $P_2$  (alle de til venstre for  $G$  virkende Kræfter) er altsaa: 1) Summen af de tre Momenter, Bøjningsmomentet med Hensyn til  $G$ , og 2) Summen af de tre Kræfter, Forskydningen i  $G$ . Selvfølgelig maa saavel de enkelte Momenter som de enkelte Kræfter regnes med Fortegn.

Hvad enten man tager Summen af de til venstre eller af de til højre for det betragtede Tværnit virkende



Kræfter, vil man faa samme numeriske Værdi for Forskydningen, men Fortegnene ville i de to Tilfælde blive modsatte, og disse to tæt opad hinanden i modsat Retning virkende Kræfter ville søge at forskyde de to Nabotværsnit, hvorpaa de virke, i Forhold til hinanden, efter hvilken Bestræbelse Paavirkningen netop har sit Navn.

For Bøjningsmomentets Vedkommende vil man ligeledes faa samme numeriske Værdi, enten man finder det ved Summen af Momenterne af Kræfterne til venstre for Tværsnittet eller til højre derfor, men det vil derimod faa modsat Fortegn i de to Tilfælde  $\circ$ : Bøjningsmomentet bestemt ved Kræfterne til venstre vil angive en Drejning med Uhrets Visere (se Fig. 39), medens Bøjningsmomentet fundet ved Kræfterne til højre angiver en Drejning mod Uhrets Visere. Kræfterne til venstre ville altsaa søge at dreje den venstre Ende af Bjælken opad og Kræfterne til højre at dreje den højre Ende opad; disse Drejninger skulle hindres af Sammenhængskraften i Legemet's Materiale. Imidlertid ville disse Bestræbelser til Drejning i modsat Retning bevirke en Bøjning af Legemet, hvorfor Momentssummerne kaldes Bøjningsmomenter.

Ved Bestemmelsen af Konstruktionsdeles Tværsnitsdimensioner benytter man, som det vil ses af Styrkelæren, kun den numeriske Værdi af Forskydninger og Bøjningsmomenter.

I Henhold til det foregaaende vil man ved Betragtning af Fig. 39 faa følgende Værdier for Forskydningen i Bjælkens forskellige Tværsnit:

Forskydningen mellem $A$ og $C$	er	$F_1 = R_1$
— — — — — $C$ og $D$	er	$F_2 = R_1 + P_1$
— — — — — $D$ og $E$	er	$F_3 = R_1 + P_1 + P_2$
— — — — — $E$ og $B$	er	$F_4 = R_1 + P_1 + P_2 + P_3 = -R_2$

hvor man har fundet Forskydningerne som Summen af de til venstre for vedkommende Tværsnit virkende Kræfter.

Søges Bøjningsmomenterne for de samme Kræfter, faar man efterhaanden følgende Værdier for  $M_b$ , nemlig:

I  $A$ , hvor  $x = 0$ , er  $M_b = 0$ ;

i Afstanden  $x$  fra  $A$ , naar  $x < l_1$  (mellem  $A$  og  $C$ ) -er  
 $M_b = R_1 x$ ;

i  $C$ , hvor  $x = l_1$ , er .....  $M_b = R_1 l_1$ ;

i Afstanden  $x$  fra  $A$ , naar  $l_1 < x < l_2$  (mellem  $C$  og  $D$ ),  
er  $M_b = R_1 x + P_1 (x - l_1)$ ,

i  $D$ , hvor  $x = l_2$ , er .....  $M_b = R_1 l_2 + P_1 (l_2 - l_1)$ ;

i Afstanden  $x$  fra  $A$ , naar  $l_2 < x < l_3$  (mellem  $D$  og  $E$ ),  
er  $M_b = R_1 x + P_1 (x - l_1) + P_2 (x - l_2)$ ;

i  $E$ , hvor  $x = l_3$ , er  $M_b = R_1 l_3 + P_1 (l_3 - l_1) +$   
 $P_2 (l_3 - l_2)$ ;

i Afstanden  $x$  fra  $A$ , naar  $l_3 < x < l$  (mellem  $E$  og  $B$ ),  
er  $M_b = R_1 x + P_1 (x - l_1) + P_2 (x - l_2)$   
 $+ P_3 (x - l_3) = R_2 (l - x)$ ;

i  $B$ , hvor  $x = l$ , er  $M_b = 0$ .

Ved Benyttelsen af disse for Forskydningerne og Bøjningsmomenterne fundne Udtryk maa man naturligvis indsætte Kræfterne med Fortegn.

Foruden ved Beregning kunne Forskydninger og Bøjningsmomenter ogsaa godt bestemmes ad grafisk Vej, men forinden den grafiske Fremgangsmaade angives, skal det bemærkes, at man, for lettere at kunne sammenligne flere Bøjningsmomenter, ved deres grafiske Fremstilling omdanner dem saaledes, at de alle faa en fælles Faktor.

Man siger i saa Fald, at man reducerer dem til denne fælles Faktor som Basis, og de andre Faktorer blive da Udtryk for Bøjningsmomenternes Størrelse. De reduceres saaledes enten til samme Arm eller til samme Kraft som Basis. De nye Momenter kaldes reducerede Momenter.

Indgaar saaledes Kraften  $P_1$  (Fig. 40<sup>b</sup>) i en Kraftpolygon, hvis Pol er  $p$ , saa at de Kraften omsluttende Polstraaler ere  $\overline{op}$  og  $\overline{pl}$ , og de med disse parallelle Stangpolygonsider (Fig. 40<sup>a</sup>)  $E I$  og  $I II$ , vil Kraften  $\overline{ol}$ 's Moment med Hensyn til et vilkaarligt Punkt  $D$  kunne paavises at være Produktet af Polafstanden  $a$  og det Stykke, som Stangpolygonsiderne eller deres Forlængelser afskære paa en Linie, der trækkes gennem  $D$  parallel med Kraften  $P_1$ . Dette Stykke er paa Figuren betegnet med  $BC$ , og Kraften  $P_1$ 's Moment  $M$  med Hensyn til  $D$  skal altsaa være

$$M = a \cdot BC.$$

$$\text{Da } \triangle IBC \sim \triangle o1p,$$

$$\text{har man } \frac{\overline{ol}}{a} = \frac{BC}{d}, \text{ hvoraf } \overline{ol} \cdot d = a \cdot BC.$$

$\overline{ol} \cdot d$  er  $P_1$ 's Moment med Hensyn til  $D$ , og dette Moment kan altsaa udtrykkes ved  $a \cdot BC$ .

For den paa Fig. 39 viste Bjælkes Vedkommende er den grafiske Fremgangsmaade til Bestemmelse af Bøjningsmomenter og Forskydninger nærmere angiven paa Fig. 41.

Kræfterne  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$  ere afsatte efter hverandre i den for dem angivne Retning som  $\overline{ol}$ ,  $\overline{l2}$  og  $\overline{23}$ . Dernæst er valgt en Pol  $p$ . Beliggenheden af den kan i Princippet være ligegyldig, men af praktiske Hensyn maa Polafstanden være udtrykt ved en Talstørrelse, som det er let at multiplicere med, altsaa, hvis ikke Enheden kan bruges, f. Eks. ved 10 eller et andet simpelt Tal, saasom en Potens eller et Multiplum af 10.

Efterat Polstraalerne ere tegnede, dannes Stangpolygonen paa sædvanlig Maade ved Linier parallelle med Polstraalerne, nemlig  $\overline{VI} \neq \overline{op}$ ,  $\overline{VII} \neq \overline{lp}$ ,  $\overline{VIII} \neq \overline{2p}$  og  $\overline{IIIIV} \neq \overline{3p}$ . Tilsidst tegnes  $\overline{IVV}$ , den saakaldte Slutlinie, og parallel med den  $\overline{4p}$ . Reaktionerne  $R_2$  og  $R_1$  ville da faa henholdsvis Værdierne  $\overline{34}$  og  $\overline{40}$ .

Forskydningen i de forskellige Tværsnit (se Fig. 41<sup>c</sup>) er grafisk angiven ved Ordinaterne i Arealet  $abcdefgik$ . De have følgende Værdier:

$$\begin{aligned} \text{i Arealet } abcm \text{ er } F_1 &= ab = \overline{40} = R_1 \\ - \quad - \quad mden \quad - F_2 &= md = \overline{41} = R_1 + P_1 \\ - \quad - \quad nfgo \quad - F_3 &= nf = \overline{42} = R_1 + P_1 + P_2 \\ - \quad - \quad ohik \quad - F_4 &= ki = \overline{43} = R_1 + P_1 + P_2 + P_3. \end{aligned}$$

Bøjningsmomenterne findes angivne paa Fig. 41<sup>a</sup> som Længden af de Linier, parallelle med de ydre Kræfter, der afskæres indenfor Omkredsen af Stangpolygonen  $I II III IV V$ , for Polafstanden  $a$  som Enhed eller Basis. Det af Stangpolygonen begrænsede Areal kaldes derfor ogsaa Momentfladen. For at faa Størrelsen af Bøjningsmomenterne for de forskellige Tværsnit, maa man altsaa i dette Eksempel multiplicere Ordinaterne i Momentfladen med Polafstanden  $a$ . Er Polafstanden afsat efter Kraftmaalestocken, maa Ordinaterne i Momentfladen maales paa Længdemaalestocken eller omvendt.

Betragter man f. Eks. Tværsnittet i  $G$ , vil Bøjningsmomentet med Hensyn til dettes Tyngdepunkt, naar Omdrejningsretningen med Uhret regnes for positiv, blive  $M_b = R_1 \cdot AG - P_1 \cdot CG$ . Da  $\triangle Vsr$  paa Fig. 41<sup>a</sup> er ligedannet med  $\triangle op4$  paa Fig. 41<sup>b</sup>, ville Højderne i disse Trekanter være proportionale med Grundlinierne, eller

$$\frac{sr}{AG} = \frac{\overline{04}}{a}, \text{ hvoraf } AG \cdot \overline{04} = a \cdot sr.$$

Fremdeles er  $\triangle Iqr \sim \triangle O1p$ , altsaa

$$\frac{qr}{CG} = \frac{\overline{O1}}{a}, \text{ hvoraf } CG \cdot \overline{O1} = a \cdot qr.$$

Herved faar man

$$M_b = R_1 \cdot AG - P_1 \cdot CG = a \cdot sr - a \cdot qr = a(sr - qr) = a \cdot sq$$

o: Bøjningsmomentet for et Tværnsnit i Bjælken er Produktet af Polafstanden og det Stykke, som indenfor Momentfladen (Stangpolygonen) afskæres paa en Linie, der gennem vedkommende Tværnsnit tegnes parallel med Kraftretningen.

I Stedet for ved Bestemmelsen af Bøjningsmomenterne at maale Polafstanden og Ordinaterne i Momentfladen paa henholdsvis Kraftmaalestocken og Længdemaalestocken eller omvendt, kan man, om man vil, konstruere en særlig Momentmaalestock, paa hvilken Bøjningsmomenterne kunne maales direkte. Enheden for denne Maalestock vil da blive Enheden for Længdemaalestocken eller for Kraftmaalestocken divideret med Antallet af Enheder i Polafstanden, alt eftersom denne sidste maales paa Kraftmaalestocken eller Længdemaalestocken. Benævnelsen for Momentmaalestockens Enheder bliver Produktet af Benævnelserne for de to andre Maalestockes Enheder.

Ved den paa Fig. 41 viste grafiske Metode til Bestemmelse af Bøjningsmomenterne blev det angivet, at Polen  $p$  kunde vælges vilkaarlig, naar den blot laa i en simpel Afstand fra den lodrette Linie  $\overline{O3}$ . Af  $p$ 's Beliggenhed vil imidlertid Stangpolygonens Form afhænge, idet dens enkelte Sider ere parallelle hver med en Polstraale. Slutlinien  $\overline{IVV}$ , der er parallel med  $\overline{Ap}$ , bliver saaledes paa Figuren skraatliggende. Det kan imidlertid i nogle Tilfælde være fordelagtigt, at denne Slutlinie bliver vandret, og dette vilde let kunne opnaas paa Fig. 41, naar

man flyttede Polen  $p$  parallelt med  $\overline{O3}$ , indtil den kom til at ligge i den paa  $\overline{O3}$  vinkelrette Linie gennem  $4$ . Polstraalen  $\overline{Ap}$  vilde da blive vandret, og følgelig Slutlinien i den til den nye Pol svarende Stangpolygon ligeledes vandret.

Ved Bestemmelsen af Bjælkens eller Akslens Tværnsnitdimensioner vil det navnlig være Bøjningsmomenterne, som faa Betydning, og det er derfor en stor Fordel ved den grafiske Metode, at Tegningen paa en anskuelig Maade angiver, hvorledes Bøjningsmomenterne variere i Størrelse. Det fremgaar derved straks af Tegningen, hvilket Bøjningsmoment der er størst, og dette maa lægges til Grund for Bestemmelsen af Bjælkens eller Akslens Dimensioner, naar den skal være prismatisk.

Af saavel Fig. 41 som Fig. 45 fremgaar det, at Bøjningsmomentet er størst med Hensyn til det Tværnsnit, hvor Forskydningen skifter Fortegn.

I de i de nævnte Figurer behandlede Tilfælde er Bjælken understøttet i dens to Endepunkter, men Regelen vil ogsaa ses at gælde for en Bjælke, der har den ene Ende fri, og er indspændt i den anden Ende, naar man blot betragter Indspændingen som fremkommen ved en Understøtning i to Punkter.

Naar man ønsker ad Beregningens Vej at finde det største Bøjningsmoment, og man ikke forud grafisk har bestemt Beliggenheden af det Tværnsnit, med Hensyn til hvilket Bøjningsmomentet er størst, behøver man altsaa blot at opsøge det Tværnsnit, hvor Forskydningen skifter Fortegn, og derefter bestemme Bøjningsmomentet med Hensyn dertil. Naar en Aksel eller Bjælke paavirkes af nogle Kræfter lodret nedad og af andre lodret opad, kan det ske, at Forskydningen skifter Fortegn i flere Tværnsnit. I saa Fald maa man beregne Bøjningsmomenterne med Hensyn til alle disse Tværnsnit, for at komme til Klarhed

over, hvilket af dem, der er størst. Hvor der i det følgende intet særligt bemærkes, forudsættes Understøtningspunkterne at være simple Understøtningspunkter.

Ekspl. 23. En vandret liggende Bjælke  $AB$  belastes i de paa Fig. 42 viste Punkter  $C$ ,  $D$ ,  $E$  og  $G$  af Kræfter henholdsvis paa 2000 kg, 800 kg, 1000 kg og 2400 kg, alle virkende lodret nedad, idet  $AC = 1$  m,  $AD = 1,5$  m,  $AE = 2$  m,  $AG = 3$  m og  $AB = 4$  m.

Man skal bestemme Reaktionen i  $A$  og  $B$  samt Bøjningsmomenterne og Forskydningerne i  $C$ ,  $D$ ,  $E$  og  $G$ .

Regnes Retningen lodret nedad for positiv, faar man

$$A = - \frac{2000 \cdot 3 + 800 \cdot 2,5 + 1000 \cdot 2 + 2400 \cdot 1}{4} = - 3100 \text{ kg.}$$

$$B = - 2000 - 800 - 1000 - 2400 + 3100 = - 3100 \text{ kg.}$$

Forskydningen mellem  $A$  og  $C$  er  $F_1 = - 3100$  kg.

— —  $C$  og  $D$  er  $F_2 = - 1100$  kg.

— —  $D$  og  $E$  er  $F_3 = - 300$  kg.

— —  $E$  og  $G$  er  $F_4 = + 700$  kg.

— —  $G$  og  $B$  er  $F_5 = + 3100$  kg.

Forskydningen skifter altsaa Fortegn i Tværsnit  $E$ .

Bøjningsmomentet med Hensyn til  $E$  vil, naar Afstandene indføres i mm, og naar Omdrejningsretningen med Uhret regnes for positiv, blive

$$M_b = 3100 \cdot 2000 - 2000 \cdot 1000 - 800 \cdot 500 = 3800000 \text{ kgmm.}$$

Bøjningsmomenterne med Hensyn til de andre Punkter faa nedenstaaende Værdier:

Med Hensyn til  $C$  bliver  $M_b = 3100000$  kgmm.

- — -  $D$  —  $M_b = 3650000$  kgmm.

- — -  $G$  —  $M_b = 3100000$  kgmm.

Ekspl. 24. Bjælken  $AB$  af Længde  $l$  mellem Understøtningspunkterne paavirkes af en Kraft  $P$  i Midten. Det største Bøjningsmoment og Forskydningerne skulle findes (se Fig. 43 a).

$$R_1 = R_2 = - \frac{1}{2} P.$$

Forskydningen er paa ethvert Punkt af saavel Stykket  $AC$  som  $BC$  lig med  $\frac{1}{2} P$ .

Bøjningsmomentet med Hensyn til et vilkaarligt Punkt i Afstanden  $x$  fra  $A$  bliver, naar  $x < \frac{1}{2} l$ ,  $M_b = \frac{1}{2} P x$ , og naar  $x > \frac{1}{2} l$ ,  $M_b = \frac{1}{2} P x - P(x - \frac{1}{2} l) = \frac{1}{2} P(l - x)$ . For  $x = \frac{1}{2} l$  faar  $M_b$  sin største Værdi, nemlig

$$M_b = \frac{1}{4} P l. \quad (7)$$

Bjælkens farligste Tværsnit er altsaa i Midten.

Med Hensyn til Endepunkterne af Bjælkens Akse ere Bøjningsmomenterne Nul.

Fig. 43<sup>a, b</sup> og <sup>c</sup> vise den grafiske Løsning.

Ekspl. 25. En Bjælke  $AB$  har Længden  $l$ . Den er understøttet i Endepunkterne og paavirket af en over hele Længden jævnfordelt Belastning  $P$  (se Fig. 44).

Find Bøjningsmomenter og Forskydninger.

$$R_1 = R_2 = - \frac{1}{2} P.$$

Forskydningen vil i  $A$  og  $B$  være  $\frac{1}{2} P$  og derfra aftage jævnt henimod Midten, hvor den er Nul. Bøjningsmomentet for et Tværsnit  $C$  i Afstanden  $x$  fra  $A$  er

$$M_b = \frac{1}{2} P x - \frac{P x}{l} \cdot \frac{1}{2} x, \text{ idet Belastningen paa Stykket } AC$$

er  $\frac{P x}{l}$ , som maa tænkes virkende i Midten af Stykket,

altsaa paa Armen  $\frac{1}{2} x$ .

$$M_b = \frac{1}{2} P x - \frac{P x^2}{2l} = \frac{P x (l - x)}{2l},$$

som vokser med  $x$  indtil  $x = \frac{1}{2}l$ , hvor  $M_b$  bliver størst, nemlig

$$M_b = \frac{1}{8} P l. \quad (8)$$

Bjælkens farligste Tværsnit er i Midten. Med Hensyn til Endepunkterne af Bjælkens Akse er  $M_b = 0$ .

Den grafiske Bestemmelse af saavel Bøjningsmomenter som Forskydninger er vist paa Fig. 45. Linien  $AB$  deles i et vilkaarligt Antal lige store Dele (her otte). Gennem Delingspunkterne er der tegnet lodrette Linier, som dele Belastningen, der er angiven ved Rektanglet  $ABDE$ , i otte lige store Rektangler, som altsaa repræsenterer Belastningerne paa  $AB$ 's Stykker. I disse Rektanglers Tyngdepunkter tænkes Belastningerne virkende som ligestore Kræfter lodret nedad. Disse Kræfter ere paa Fig. 45<sup>a</sup> betegnede ved  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$ . Af Kræfterne dannes som sædvanlig en Kraftpolygon (Fig. 45<sup>b</sup>) og derefter den dertil svarende Stangpolygon  $I II III \dots IX X$ . Bjælkens farligste Tværsnit viser sig at være i Midten af den, og Bøjningsmomentet her bliver altsaa Ordinaten i Midten af Momentfladen multipliceret med Polafstanden. Jo flere Dele man deler  $AB$  i, desto mere vil den brudte Linie  $X I II III \dots VIII IX$  nærme sig til at blive en Parabel, og desto nøjagtigere blive Bøjningsmomenterne bestemte.

Det Areal, hvis Ordinator angive Forskydningerne (Fig. 45<sup>c</sup>), er betegnet ved  $abcd$ . Havde Bjælken været belastet af de otte enkelte Vægte i Stedet for af en jævnfordelt Belastning, vilde Arealet være blevet begrænset af den brudte Linie  $aefgh \dots rstud$  i Stedet for af Linien  $ad$ . Det er paa Figuren vist skraveret.

Ekspl. 26. En Bjælkes Understøtningspunkter  $A$  og  $B$  (se Fig. 46) ligge i Afstanden  $l$  fra hinanden. I et Punkt  $C$  beliggende mellem  $A$  og  $B$ , saaledes at  $AC = l_1$ , paa-virkes Bjælken af Kraften  $P_1$  lodret nedad og i Punktet

$D$ , til højre for  $A$  og  $B$  i Afstanden  $AD = l_2$ , af en ligeledes lodret nedad virkende Kraft  $P_2$ . Man skal bestemme Bøjningsmomenterne samt Forskydningen paa det Sted, hvor Bøjningsmomentet er størst.

Opgaven er løst grafisk. Paa Fig. 46<sup>b</sup> er  $P_1$  afsat som  $\overline{0I}$  og  $P_2$  som  $\overline{I2}$ .  $\overline{IV1} \neq \overline{0p}$ ,  $\overline{I11} \neq \overline{1p}$ ,  $\overline{II111} \neq \overline{2p}$ . Slutlinien er paa Fig. 46<sup>a</sup>  $\overline{III IV}$ , og parallel med den er tegnet  $\overline{3p}$  paa Fig. 46<sup>b</sup>. Reaktionerne i  $B$  og  $A$  blive henholdsvis  $P_3 = \overline{23}$  og  $P_4 = \overline{30}$ .

Det farligste Tværsnit bliver i  $C$ ; Forskydningen har der Størrelsen  $\overline{3I}$ . For Tværsnittet  $E$  er Bøjningsmomentet 0.

Ekspl. 27. Bjælken  $AB$  er 5 m lang; den belastes dels af 600 kg pr. løb. m, dels af 3000 kg, 1000 kg og 1600 kg i Afstande fra  $A$  af henholdsvis 1 m, 1,5 m og 3,5 m. Bøjningsmomentet for det farligste Tværsnit skal bestemmes (Fig. 47).

Antages den positive Retning at være lodret nedad, vil den jævnfordelte Belastning i  $A$  give en Reaktion af  $-1500$  kg og de enkelte Vægte en Reaktion af  $-3580$  kg. Reaktionen i  $A$  bliver saaledes i alt  $-5080$  kg og Reaktionen i  $B$   $-3520$  kg. Forskydningen vil, naar den bestemmes ved Summen af Kræfterne til venstre for vedkommende Tværsnit, i  $C$ ,  $D$  og  $E$  blive henholdsvis  $-1280$  kg,  $-180$  kg og  $+2620$  kg. Den maa altsaa, da Belastningen mellem  $D$  og  $E$  er jævnfordelt, mellem disse Punkter først aftage negativt indtil Nul og derefter vokse positivt. Det Punkt af Bjælken, hvor Forskydningen er Nul, vil ligge i en Afstand  $x$  fra  $A$ , der er bestemt ved Ligningen

$$-5080 + 3000 + 1000 + 600x = 0,$$

$$\text{hvoraf } x = 1,8 \text{ m.}$$

Bøjningsmomentet for dette Tværsnit bliver

$$M_b = -3520 \cdot 3,2 + 1600 \cdot 1,7 + \frac{600 \cdot 3,2^2}{2}$$

$$= -5472 \text{ kgm} = -5472000 \text{ kgmm.}$$

Ekspl. 28. En Bjælke er understøttet ved Enderne og belastes som angivet paa Fig. 48. Find det største Bøjningsmoment.

$$A \cdot 11,6 + 3000 \cdot 3 \cdot 10,1 + 4000 \cdot 6,8 + 3000 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0.$$

$$A = -13414 \text{ kg}, B = 13414 - 28000 = -14586 \text{ kg.}$$

Forskydningen vil blive Nul for et Tværsnit i en Afstand  $y$  fra  $B$ , hvor  $y$  er mindre end 5 m.

$y$  bestemmes af Ligningen

$$-14586 + 3000 y = 0; y = 4,862 \text{ m} = BC.$$

Det største Bøjningsmoment faar man med Hensyn til  $C$ , og det er

$$M_b = -14586 \cdot 4,862 + \frac{3000 \cdot 4,862 \cdot 4,862}{2}$$

$$= -35458566 \text{ kgmm.}$$

Ekspl. 29. En vandret liggende Bjælke af Længde  $l$  er indspændt i den ene Ende ved  $A$ , medens den anden Ende  $B$  er fri, og paavirkes af de lodrette Kræfter  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  og  $P_4$ , hvis Angrebspunkter ligge henholdsvis i Afstandene  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  og  $l$  fra  $A$ . Bøjningsmomenterne bestemmes grafisk, og derefter beregnes det største Bøjningsmoment og Forskydningen for samme Tværsnit (Fig. 49).

Paa Fig. 49<sup>b</sup> ere Kræfterne afsatte som  $\overline{01}$ ,  $\overline{12}$ ,  $\overline{23}$  og  $\overline{34}$  paa en lodret Linie. Til Pol er valgt  $p$  i en Linie gennem  $4$  vinkelret paa  $\overline{0A}$ . Stangpolygonsiderne blive

parallele med de til Polen trukne Polstraalere. Bøjningsmomenterne ses her at vokse henimod Indspændingen, og det samme vil være Tilfældet med Forskydningen, som mellem  $P_4$  og  $P_3$  har Værdien  $P_4$ , mellem  $P_3$  og  $P_2$  Værdien  $P_4 + P_3$ , mellem  $P_2$  og  $P_1$  Værdien  $P_4 + P_3 + P_2$  samt mellem  $P_1$  og Indspændingen, altsaa ogsaa i denne, Værdien  $P_4 + P_3 + P_2 + P_1$ .

Det største Bøjningsmoment  $M_b$  er Produktet af  $\sqrt{VI}$  og Polafstanden  $\overline{pA}$ . Ved Beregning findes

$$M_b = P_4 l + P_3 l_3 + P_2 l_2 + P_1 l_1.$$

Ved Indspændingen maa Befæstelsen ske paa en saadan Maade, at den vil kunne modstaa et Bøjningsmoment, som er større end  $M_b$ .

Belastes Bjælken af en enkelt Kraft  $P$  i Endepunktet  $B$ , vil Bøjningsmomentet ifølge sidst anførte Ligning, naar i denne  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$  sættes lig Nul, blive

$$M_b = P l. \quad (9)$$

Forskydningen ved Indspændingen bliver i saa Fald  $P$ .

Ekspl. 30. En Bjælke er indspændt i den ene Ende og belastet af en over dens Længde jævndelt Byrde. Dette Tilfælde behandles grafisk ganske paa den samme Maade, som er anvendt paa Fig. 45, efter at man har delt Belastningen i et passende Antal lige store Dele, hvis Vægte tænkes virkende gennem de vedkommende Deles Tyngdepunkter.

Ligger Indspændingen  $A$  (Fig. 50) og den frie Ende  $B$  i en indbyrdes Afstand  $l$ , og er den jævndelte Belastning  $P$ , bliver Bøjningsmomentet med Hensyn til et Punkt  $C$ , der ligger i Afstanden  $x$  fra  $B$ ,  $M_b = \frac{Px}{l} \cdot \frac{1}{2} x = \frac{Px^2}{2l}$ . Belastningen paa Stykket  $BC$  er nemlig  $\frac{Px}{l}$ , og den virker

paa en Arm  $\frac{1}{2} x$ .  $M_b$  vokser med  $x$  og faar den største Værdi ved Indspændingen, hvor

$$M_b = \frac{1}{2} P l. \quad (10)$$

Forskydningen i  $A$  har Værdien  $P$ .

Det største Bøjningsmoment (ved Indspændingen) bliver altsaa, naar Vægten er jævnt fordelt, kun halvt saa stort som i det Tilfælde, hvor hele Vægten er ophængt i Bjælkens frie Ende. Forskydningen i Indspændingen faar derimod samme Værdi i begge Tilfælde.

Ekspl. 31. Tre Vægte  $A$ ,  $B$  og  $C$  med indbyrdes uforanderlige Afstande bevæge sig fra den ene til den anden Ende af en vandret liggende Bjælke  $DE$ . Bjælkens farligste Tværsnit og Bøjningsmomentet for dette søges (Fig. 51).

Opgaven er løst grafisk paa den Maade, at Vægtene tænkes liggende stille, medens Bjælken bevæger sig under dem, men i modsat Retning af den, i hvilken Vægtene vilde bevæge sig. Under denne Forudsætning har man paa Fig. 51<sup>a</sup> bestemt Momentfladerne for fem forskellige Stillinger, nemlig de to Yderstillinger og tre mellemliggende Stillinger. Disse fem Stillinger ere betegnede med Tallene fra 1 til 5 saaledes, at altid to tilsvarende Understøtninger ere mærkede med samme Tal, ligesom Slutlinien i Momentfladen for vedkommende Stilling og de dermed parallelle Polstraaler ogsaa ere mærkede med dette Tal. Man faar paa denne Maade et let Overblik over Størrelsen saavel af Reaktionen som af Bøjningsmomenter.

Ekspl. 32. En Trappevange, hvis Midtlinie paa Fig. 52 er betegnet med  $AB$ , har en Hældning af  $45^\circ$  mod en vandret Linie og paavirkes paa de paa Figuren angivne otte Steder af 150 kg paa hvert Sted. Linien  $AC = 1785$  mm.

Vangen antages i  $B$  støttet mod et lodret Plan, saaledes at der af dette kun kan ydes en vandret Modstand, samt i  $A$  fastgjort til et vandret Plan paa en saadan Maade, at Glidning er forhindret. Paavirkningerne i Vangens forskellige Tværsnit dels efter dens Længde og dels til Bøjning og Forskydning skulle bestemmes.

De otte ydre Kræfter ere betegnede med Tallene fra 1 til 8 og ere afsatte efter hverandre paa Fig. 52<sup>b</sup> i en lodret Linie  $EF$ . Der er dernæst valgt en Pol  $p$  saaledes, at dens Afstande til  $EF$  og til en vandret Linie gennem  $F$  blive lige store. Som det vil fremgaa af det følgende, vælges  $p$  netop paa dette Sted af Hensyn til en simpel Fremstilling af Bøjningsmomenterne, idet de derved alle reduceres til samme Polafstand som Basis.

Efter at Straalerne til Polen  $p$  ere tegnede, har man ved Linier parallelle med Polstraalerne konstrueret Stangpolygonen  $I II \dots VII VIII$ , hvis første og sidste Side skære hinanden i  $S$ , der saaledes er et Punkt af de otte givne Kræfters Resultant. Denne skærer den vandrette Modstandslinie gennem  $B$  i  $D$ , og Modstanden gennem  $A$  maa nu, for at der kan være Ligevægt mellem de givne Kræfter og de to Modstande, have Retningen  $AD$ . Denne Ligevægt mellem Kræfterne er paa Fig. 52<sup>b</sup> angiven ved  $\triangle EFQ$ , hvor  $9 \neq BD$  og  $10 \neq AD$ . For de ti Kræfter 1 til 10 har man derefter konstrueret en Stangpolygon med  $Q$  som Pol, og man har altsaa fraveget den i § 2 d (Side 17) anførte almindelige Regel. Man opnaar imidlertid ved at vælge en af Kraftpolygonens Vinkelspidser til Pol, at enhver af de enkelte Straaler ved dens Størrelse og Retning angiver Resultanten af de Kræfter, som i Kraftpolygonen ligge mellem Straalens Endepunkter. Saaledes er 17 Resultant af 8 og 9, 16 af 7, 8 og 9 o. s. v. Den Stangpolygon, som svarer til disse Polstraaler, bliver derved en saakaldt Middelkraftlinie, og da enten

en Middeltryklinie eller en Middeltræklinie, eftersom de enkelte Sider i den udsættes for sammentrykkende eller strækkende Kræfter.

Middeltryklinien paa Fig. 52<sup>a</sup> er betegnet med  $AI'II'$  . . .  $VII'VIII' B$ . Det øverste Stykke af Vangen indtil det Sted, hvor 8 angriber, paavirkes af 9, som paa Fig. 52<sup>b</sup> atter er opløst i een Kraft efter Vangens Længderetning og een vinkelret derpaa. Det næste Stykke af Vangen mellem Angrebspunkterne for 7 og 8 paavirkes af 17, der ogsaa er opløst i Komposanter efter de samme Retninger. De øvrige Stykker af Vangen paavirkes af henholdsvis 16, 15, 14, 13, 12, 11 og 10, der ligeledes alle ere opløste i to Komposanter efter de nævnte Retninger. Komposanterne efter Vangens Retning virke til Sammentrykning af den, Komposanterne tværs paa den til Forskydning.

Vangen vil, foruden disse sammentrykkende og forskydende Paavirkninger, tillige være Genstand for bøjende Paavirkninger i dens forskellige Tværsnit. Betragtes f. Eks. Tværsnittet gennem  $s_8$ , vil Bøjningsmomentet med Hensyn til dette Punkt være Summen af Momenterne af de to til højre for Tværsnittet virkende Kræfter med Hensyn til dette Punkt. Kræfterne ere den vandrette Kraft 9 og den lodrette 8. 9's Moment er for  $a$  ( $pG$ ) som Polafstand  $b_8m_8$ , fordi  $\triangle b_8Nm_8 \sim \triangle QpF$ , og 8's Moment bliver for  $a$  ( $pH$ ) som Polafstand  $c_8n_8$ , idet  $\triangle c_8VIII'n_8$  er ligedannet med den Trekant paa Fig. 52<sup>b</sup>, som til Toppunkt har  $p$  og til Grundlinie 8. Disse Momenter virke til Drejning i modsatte Retninger, og det resulterende Bøjningsmoment bliver da Produktet af  $a$  og Størrelsen  $b_8m_8 - c_8n_8$ . Denne Differens er afsat paa Fig. 52<sup>a</sup> som  $n_8g_8$ , idet  $c_8g_8 = b_8m_8$ . For Punktet  $s_7$  er Bøjningsmomentet  $n_7g_7$  og saaledes videre. Ordinaterne i det skraverede Areal ville multiplicerede med  $a$  give Bøjningsmomenterne for Vangens forskellige Tværsnit.

Det skraverede Areals nederste Begrænsningslinie er, som omtalt, fremkommen ved at afsætte  $b_8m_8, b_7m_7 \dots$  o. s. v. fra  $c_8, c_7$  o. s. v. lodret nedad. Man kunde lige saa godt have afsat dem lodret opad fra  $n_8, n_7$  o. s. v., og man vilde i saa Fald have faaet Bøjningsmomentfladen begrænset foroven af den rette Linie  $AL$ , o: Bøjningsmomenterne ville for Vangen  $AB$ 's forskellige Tværsnit faa samme Værdier som Bøjningsmomenterne for de tilsvarende Tværsnit i en vandret liggende Bjælke af Længde  $AC$ , der er understøttet ved Enderne og paavirket af de samme lodrette Kræfter som Vangen.

Ved en aldeles lignende Fremgangsmaade som ovenstaaende kan man finde Paavirkningerne i en krum Bjælkes Tværsnit, naar den er understøttet i de to Endepunkter, og man kender Retningen af Reaktionen i et af disse Understøtningspunkter.

Ekspl. 33. En krum Kranstamme har den paa Fig. 53 angivne Form  $ABC$ . Den støttes ved  $A$  i et Sporleje og ved  $B$  i et Halseje, medens der ved  $C$  er ophængt en Byrde 1. Paavirkningerne i Kranstammens forskellige Tværsnit ønskes bestemte, idet man ikke tager Hensyn til dens Egenvægt.

Modstanden 2 gennem  $B$  maa være vandret, og Modstanden 3 vil til Kraftlinie have  $AD$ , fordi 1, 2 og 3 skulle skære hverandre i eet Punkt. Ligevægten mellem disse tre Kræfter er angiven paa Fig. 53<sup>b</sup> ved en Trekant, der er bestemt ved Størrelsen af 1 og Retningerne af 2 og 3, idet  $2 \neq BD$  og  $3 \neq AD$ . Paavirkningerne i de med  $a, b, c, d, e, f$  og  $g$  betegnede Punkter af Kranstammen ere fundne ved Fig. 53<sup>a</sup> og b.

Med Hensyn til  $g$  er Bøjningsmomentet 0. Derimod virker der gennem  $g$  Kraften 1, som er opløst efter Tangenten og Normalen til Kranstammen i  $g$ . Disse Kompo-



santer ere betegnede ved  $g_1$  og  $g_2$ .  $g_1$  virker til Strækning,  $g_2$  til Forskydning.

I  $f$  vil Kranstammen dels paavirkes af et Bøjningsmoment, hvis Størrelse er Ordinaten  $f_3$  multipliceret med Polafstanden  $z$ , dels af en enkelt Kraft  $l$ , som opløses efter Tangent og Normal til Kranstammen i Punkt  $f$ . Komposanten  $f_1$  virker til Strækning,  $f_2$  til Forskydning.

Paa samme Maade findes Paavirkningerne i de andre Tværsnit af Kranstammen. Deres Værdier ere angivne i nedenstaaende Skema.

Tværsnit.	Bøjningsmoment.	Forskydning.	Sammentrykning.	Strækning.
$a$	$a_3 \cdot \bar{z}$	$a_2$	$a_1$	0
$b$	$b_3 \cdot \bar{z}$	$b_2$	$b_1$	0
$c$	$c_3 \cdot \bar{z}$	$c_2$	$c_1$	0
$d$	$d_3 \cdot \bar{z}$	$d_2$	$d_1$	0
$e$	$e_3 \cdot \bar{z}$	$e_2$	0	0
$f$	$f_3 \cdot \bar{z}$	$f_2$	0	$f_1$
$g$	0	$g_2$	0	$g_1$

Ekspl. 34. I Fig. 54 er der vist en Kran med faststaaende Stamme. Kranens bevægelige Del er foroven ophængt paa en Tap ved  $A$  og forneden støttet ind mod en Del af Stammen, der er tildannet cylindrisk, for at Kranens bevægelige Del kan dreje sig om den. Kranens Egenvægt er angiven ved Kraften  $P_2$ , medens Byrden er  $P_1$ . Man skal bestemme Paavirkningerne paa Stammen og paa Fundamentboltene ved  $F$  og  $G$ . Kræfterne  $P_1$  og  $P_2$  ere ved Hjælp af Polstraalerne til Polen  $p$  og Stangpoly-

gonen  $I II III$  sammensatte til en fælles Resultant. Reaktionen, som Stammen maa yde, og som skulle holde Ligevægt med den fundne Resultant  $P_1 + P_2$ , maa gaa gennem  $A$  og  $B$ . Da Stammen er cylindrisk ved  $B$ , maa Reaktionen her være vandret; den skærer  $P_1 + P_2$  i  $C$ . Gennem dette Punkt og  $A$  maa den anden Reaktion altsaa gaa. Reaktionen ere betegnede ved henholdsvis  $P_4$  og  $P_3$ , og deres Størrelser ere fundne paa Fig. 54<sup>b</sup>.  $P_3$  er atter opløst i  $P_5$  og  $P_6$ . Stammen vil saaledes for det første blive paavirket til Sammentrykning af  $P_6$ . Paa Fig. 54<sup>c</sup> ere  $P_4$  og  $P_5$  afsatte i modsatte Retninger af de paa Fig. 54<sup>b</sup> fundne, idet de her betegne de Paavirkninger, som Stammen faar henholdsvis i  $B$  og  $A$ , medens den er understøttet i en Fundamentplade ved  $D$  og  $E$ . De vandrette Paavirkninger i  $D$  og  $E$  findes paa Fig. 54<sup>c</sup> ved Hjælp af Polstraalerne fra Polen  $p_1$  og den dertil hørende Stangpolygon  $IV V VI IX$ , hvor  $VII IX$  er Slutlinien. Bøjningsmomenterne for Stammens forskellige Tværsnit udtrykkes ved Produkterne af Polafstanden for Polen  $p_1$  og de Stykker, som Stangpolygonen  $IV V VI IX$  afskærer af vandrette Linier gennem vedkommende Tværsnit (se Fig. 54<sup>a</sup>). Endelig har man ved Stangpolygonen  $III VII VIII$  for Polen  $p$  fundet de Paavirkninger  $P_7$  og  $P_8$ , som Fundamentboltene udsættes for efter deres Længderetning.

Er en Bjælke simpelt understøttet i Endepunkterne og paavirket af Kræfter, som vel ligge indbyrdes i samme Plan og i Plan med Bjælkens Akse, men ikke staa vinkelrette paa denne, kan man, i Stedet for at anvende den i Ekspl. 32 og 33 angivne Fremgangsmaade, gaa frem paa den Maade, at man opløser de enkelte Kræfter i Komposanter efter Bjælkens Længdeakse og vinkelret derpaa. Denne Fremgangsmaade er navnlig at foretrække, naar Beregningsmetoden anvendes. Komposanterne efter Aksen

ville enten virke til Sammentrykning eller til Strækning, og Komposanterne vinkelret paa Aksen til Bøjning og Forskydning.

Paavirkes saaledes  $AB$  (Fig. 55) i  $C$  af Kraften  $P$ , der med  $AB$  danner en  $\angle v$ , ville Komposanterne efter Bjælkens Akse og vinkelret paa den være henholdsvis  $P \cos v$  og  $P \sin v$ . For at den første af disse ikke skal medføre en Bevægelse af Bjælken i vandret Retning, maa denne være befæstet. Er den fastgjort i  $A$ , vil  $AC$  blive sammentrykket af  $P \cos v$ , men  $BC$  blive upaavirket deraf; findes Befæstelsen derimod ved  $B$ , bliver  $BC$  strakt af  $P \cos v$  og  $AC$  upaavirket af den. I begge Tilfælde vil  $AB$  desuden faa saavel Paavirkning til Bøjning som til Forskydning hidrørende fra Komposanten  $P \sin v$ . Disse Paavirkninger bestemmes i Overensstemmelse med det foregaaende.

*b. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paavirkes af Kræfter, som skære dens geometriske Akse, og som ere vinkelrette paa den. Kræfterne ligge derimod ikke alle i samme Plan.*

I de foregaaende Eksempler er det forudsat, at de ydre Kræfter, som virkede vinkelret paa en Aksel eller Bjælke, laa i Plan med dens geometriske Akse og med hverandre indbyrdes. Dette er imidlertid ikke altid Tilfældet, og navnlig er Forholdet ved Aksler ofte det, at Kræfterne vel skære den geometriske Akse og saaledes hver for sig ligge i Plan med denne, men derimod ikke alle ligge i samme Plan. I saa Fald vil der paa Aksen virke saavel Bøjningsmomenter som forskydende Kræfter i to eller flere Planer, som indbyrdes danne bekendte Vinkler. For da at finde det med Hensyn til et eller andet Tværnsnit virkende resulterende Bøjningsmoment, maa man sammensætte de enkelte fra de givne Kræfter

hidrørende Bøjningsmomenter, og ligeledes maa man, for saa vidt man ønsker at finde Forskydningen i Tværnsnittet, sammensætte de enkelte der virkende forskydende Kræfter til en enkelt Kraft. Hvad denne sidste Sammensætning angaar, er intet nyt at bemærke, da der her kun bliver Tale om Sammensætning af flere Kræfter, som skære hverandre i eet Punkt, og som alle ligge i et Plan, der er vinkelret paa Akslens geometriske Akse. Derimod skal Bestemmelsen af de resulterende Bøjningsmomenter nærmere oplyses ved et Eksempel.

Eksp. 35. Akslen  $AB$  (Fig. 56<sup>a</sup>), der er understøttet ved  $A$  og  $B$ , paavirkes i  $C$  af en Kraft  $P_1$ , som tilligemed Akslens geometriske Akse tænkes liggende i Papirets Plan, samt i  $D$  af en Kraft  $P_2$ , som danner en Vinkel  $v$  med Papirets Plan. Baade  $P_1$  og  $P_2$  staa vinkelrette paa  $AB$ . Ved Bestemmelsen af de resulterende Bøjningsmomenter er Fremgangsmaaden da den, at man for samme Polafstand finder Bøjningsmomentfladerne for hver af de givne Kræfter for sig, og derefter for de enkelte Tværnsnits Vedkommende under Vinklen  $v$  sammensætter Ordinaterne i disse Bøjningsmomentflader. For lettere at kunne foretage denne Sammensætning, vælges Polerne saaledes, at Slutlinierne i begge Stangpolygoner blive vandrette. Hvorledes man kan opnaa dette, er vist nederst Side 50. Paa Fig. 56<sup>b</sup> er Polen  $p_1$  lagt i Afstanden  $a$  fra  $P_1$ , saaledes at Slutlinien  $AB$  i Stangpolygonen  $AcB$  bliver vandret. Paa Fig. 56<sup>c</sup> er Polafstanden for Polen  $p_2$  ligeledes  $a$ , og den tilsvarende Stangpolygon paa Fig. 56<sup>a</sup> er  $AdB$ . Slutlinierne for de to Stangpolygoner falde altsaa sammen. Sammensætningen af Ordinaterne i de to Momentflader er vist paa tre Steder. Ved Tværnsnittet  $C$  er Linien  $cC$  afsat lig med  $fC$  saaledes, at den danner Vinklen  $(180-v)^\circ$  med  $Cg$ . Resultanten af  $fC$  og  $Cg$  bliver da  $fg$ , som i Papirets

Plan er afsat fra  $C$  som  $Cb$ . Alle de resulterende Bøjningsmomenter komme til at ligge i en vindskæv Flade, men tænkes afsatte i Papirets Plan fra  $AB$  paa Linier vinkelrette paa denne, hvorved man faar Momentfladen  $ABeb$  for de resulterende Bøjningsmomenter.

$P_1$ 's Reaktioner i  $A$  og  $B$  ere henholdsvis  $A_1$  og  $B_1$ , medens  $P_2$ 's Reaktioner i disse Understøtningspunkter ere  $A_2$  og  $B_2$ . De resulterende Reaktionen faar man ved Sammensætning af henholdsvis  $A_1$  og  $A_2$  og af  $B_1$  og  $B_2$ . Man vil iøvrigt let ved den nøje Forbindelse, der er imellem Fig. 56<sup>a</sup> paa den ene Side og Fig. 56<sup>b</sup> og 56<sup>c</sup> paa den anden Side, kunne indse, at Reaktionen i  $A$  vil være Stykket  $mn$ , som afskæres mellem  $AB$  og  $Ab$  paa en Linie, der er tegnet parallel med  $P_1$  i Afstanden  $a$  fra  $A$ . Reaktionen i  $B$  vil være Stykket  $rs$ , der i Afstanden  $a$  fra  $B$  afskæres mellem  $AB$  og  $Be$ . Ved Bestemmelsen af Akslens Tværnsnitdimensioner maa selvfølgelig de resulterende Bøjningsmomenter benyttes.

I det foreliggende Eksempel skifte ingen af Bøjningsmomenterne Fortegn. Ifald et af dem skifter Fortegn, ville de paa vedkommende Tværnsnit virkende Bøjningsmomenter komme til at danne Vinklen  $180-v$  i Stedet for  $v$  med hinanden, hvortil der da maa tages Hensyn ved deres Sammensætning.

*c. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paavirkes af Kræfter, som staa vinkelrette paa dens geometriske Akse. En Del af Kræfterne eller slet ingen af dem skære Akslen.*

Det er navnlig Aksler, som paavirkes paa denne Maade.

I Fig. 57 er der i to Projektioner fremstillet en Aksel  $AD$ , der ved Lejer er understøttet i Punkterne  $A$  og  $B$ , medens der i  $C$  paa Akslen sidder en Kædeskive, til hvilken der ved en Kæde er ophængt en Vægt  $Q$ . Paa Akslen er

der fremdeles i  $D$  anbragt et Haandsving, og paa dette virkes der med en Kraft  $P$  til Omdrejning af Akslen. Haandsvingets Arm er  $R$ , og Skivens Radius regnet fra Akslens geometriske Akse til Kædens Midte  $r$ . Da  $Q$  ikke skærer Akslens geometriske Akse, vil den, foruden at virke med et Tryk  $Q$  paa Akslen i  $C$ , tillige søge at dreje den med et Moment  $Q.r$ , og den paa Haandsvinget virkende Kraft  $P$  vil ligeledes udøve et Tryk af Størrelse  $P$  paa Akslen i  $D$  samtidig med, at den vil søge at dreje Akslen med et Moment  $P.R$  i modsat Retning af den, i hvilken  $Q$  vil dreje den. Ser man bort fra Gnidningsmodstandene, vil  $P$  kunne løfte  $Q$ , for saa vidt  $P.R > Q.r$ . Er  $P.R = Q.r$ , vil der være Ligevægt mellem de to til Omdrejning i modsatte Retninger virkende Kræfter  $P$  og  $Q$ .

Akslen vil altsaa, foruden at paavirkes til Bøjning af Kræfterne  $Q$  i  $C$  og  $P$  i  $D$ , tillige paa Stykket mellem  $C$  og  $D$  i alle Tværnsnit blive paavirket af hinanden modsatte Momenter af Størrelse  $Q.r$ , som ville søge at vride eller sno Akslen, hvorfor man siger, at den paavirkes til Vridning.  $Q.r$  kaldes et vridende Moment og betegnes ved  $M_v$ . Under Styrkelæren skal Vridningen blive yderligere omtalt.

Hvis der paa Akslen i Stedet for Haandsvinget og Skiven var anbragt to Tandhjul ved  $C$  og  $D$ , og Akslen indgik i en eller anden Tandhjulsforbindelse (f. Eks. som Mellemaksel i et Spil), vilde den paa Stykket mellem Tandhjulene ligeledes paavirkes til Vridning.

Vil man i saadanne Tilfælde tillige tage Hensyn til Kædeskivens, Kædens, Haandsvingets eller Tandhjulenes Vægt, maa disse medtages som Kræfter, der virke paa de respektive Steder af Akslens geometriske Akse. Akslen vil under disse Forhold i dens enkelte Tværnsnit paavirkes dels til Forskydning, dels til Bøjning og dels til Vridning. Virker der i et Tværnsnit Forskydninger i forskellige Ret-

ninger, maa de som omtalt i § 3<sup>b</sup> (Side 65) sammensættes til en enkelt forskydende Paavirkning, men i Almindelighed spiller Forskydningen en saa ringe Rolle, at man kan se bort fra den. Virker der Bøjningsmomenter i forskellige Planer, maa de ligeledes overensstemmende med § 3<sup>b</sup> sammensættes til resulterende Bøjningsmomenter. For hvert enkelt Tværsnits Vedkommende maa man derefter sammensætte det resulterende Bøjningsmoment  $M_b$  med det i Tværnittet virkende Vridningsmoment  $M_v$  til et saakaldt ideelt Bøjningsmoment  $M_i$  ved Hjælp af Ligningen

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_v^2}, \quad (11)$$

der bruges saavel til Beregning af  $M_i$  som til den grafiske Bestemmelse deraf. Den sidste er nærmere angivet i

Eksp. 36. En Aksel  $AB$  (Fig. 58<sup>a</sup>) er understøttet i Lejer ved  $A$  og  $B$ . Den paavirkes i  $C$  af en Kraft  $P_1$  og i  $D$  af  $P_2$ , som i det foreliggende Tilfælde begge antages at ligge i Papirets Plan. Akslen vil da paavirkes til Bøjning og Forskydning paa Grund af Kræfterne  $P_1$  og  $P_2$ . Men den forudsættes desuden paa Stykket  $CD$  paavirket til Vridning af et Kraftpar  $K.R$ , hvor  $K$  er Kraften og  $R$  Armen. Man skal bestemme de ideelle Bøjningsmomenter for alle Tværnit.

Paa Fig. 58<sup>b</sup> ere  $P_1$  og  $P_2$  afsatte som  $\overline{01}$  og  $\overline{12}$ , hvorefter Polen  $p$  er anbragt i Afstanden  $a$  derfra saaledes, at Slutlinien  $AB$  i Stangpolygonen  $ABLG$  bliver vandret. Bøjningsmomentet for et eller andet Tværnit vil altsaa blive den gennem Tværnittet parallel med  $P_1$  og  $P_2$  i  $ABLG$  trukne Linie multipliceret med Polafstanden  $a$ . Størrelsen af det vridende Moment, som virker i alle de Tværnit, der ligger mellem  $C$  og  $D$ , vil være  $M_v = K.R$ .

For nu grafisk at kunne finde  $M_i$  ved Formel (11), maa man reducere det vridende Moment  $K.R$  til Bøjnings-

momenternes Polafstand  $a$  som Basis, hvorved alle Momenterne blive udtrykte ved rette Linier, der let kunne sammensættes. Kaldes den ubekendte Kraft, som multipliceret med  $a$  skal være lige saa stor som  $K.R$ , for  $x$ , har man

$$x \cdot a = K.R, \text{ hvoraf } \frac{a}{R} = \frac{K}{x}.$$

$x$  er funden paa Fig. 58<sup>b</sup>, idet  $K$  er afsat henad  $P_1$  som  $\overline{05}$ . Fra  $p$  ere Linierne  $\overline{p0}$  og  $\overline{p5}$  trukne gennem  $\overline{05}$ 's Endepunkter, og i Afstanden  $R$  fra  $p$  er der tegnet en Linie parallel med  $\overline{05}$ . Det Stykke, som afskæres paa denne mellem  $\overline{p0}$  og  $\overline{p5}$ , er da  $x$ , eftersom  $\overline{05}$  og  $x$  ere Grundlinier i to lignedannede Trekanter, hvis Højder ere henholdsvis  $a$  og  $R$ . Da det vridende Moment er det samme i alle mellem  $C$  og  $D$  liggende Tværnit, vil Vridningsmomentfladen paa  $CD$  blive Rektanglet  $CEFD$ , i hvilket Siden  $CE = x$ . Den grafiske Bestemmelse af  $M_i$  er nu vist for nogle faa Tværsnits Vedkommende.  $Cc = \frac{5}{8} CE$  og  $Dd = \frac{5}{8} DF$ .  $Cg = \frac{5}{8} CG$  og  $Dl = \frac{5}{8} DL$ .  $Cc$  er om  $C$  som Centrum drejet ned i  $AB$  som  $Ci$ , hvorved

$$gi = \sqrt{Cg^2 + Ci^2} = \frac{5}{8} \sqrt{CG^2 + CE^2}.$$

Dernæst drejes  $gi$  om  $g$  som Centrum op i Linien  $CG$  som  $gJ$ . Da nu  $gG = \frac{3}{8} CG$ , bliver

$$GJ = \frac{3}{8} CG + \frac{5}{8} \sqrt{CG^2 + CE^2}.$$

Ved paa begge Sider af Lighedstegnet at multiplicere med  $a$ , faar man

$$\begin{aligned} a \cdot GJ &= \frac{3}{8} a \cdot CG + \frac{5}{8} \sqrt{(CG \cdot a)^2 + (CE \cdot a)^2} \\ &= \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_v^2} = M_i, \end{aligned}$$

altsaa er  $GJ$  for Polafstanden  $a$  som Basis det saakaldte ideelle Bøjningsmoment for Tværnittet  $C$ . Ved at bestemme det ideelle Bøjningsmoment for flere Tværnit paa den her angivne Maade, faar man Momentfladen for

de ideelle Bøjningsmomenter at være det skraverede Areal *ACJHNDBLG*.

Ønsker man ved Beregning at finde det ideelle Bøjningsmoment for et eller andet Tværnsnit f. Eks. Tværnsnittet ved *D*, er Fremgangsmaaden den, at man beregner saavel Bøjningsmomentet som Vridningsmomentet for dette Tværnsnit og indsætter de for dem fundne Værdier i Formel (11).

I ovenstaaende Eksempel har man set ganske bort fra Forskydningerne, i hvilket Tilfælde man altsaa ved Beregningen af Akslens Tværnsnitsdimensioner udelukkende tager Hensyn til de for de ideelle Bøjningsmomenter fundne Værdier.

Er der slet ingen bøjende Paavirkninger paa Akslen, men kun vridende, eller ere de bøjende Paavirkninger saa smaa, at man kan se bort fra dem, beregnes Akslen udelukkende for Vridning.

*d. Konstruktionsdelen er understøttet i flere Punkter og paavirkes af en jævnfordelt Belastning.*

I det foreliggende Afsnit om Aksler og Bjælker har man hidindtil forudsat, at vedkommende Konstruktionsdel kun understøttedes i to Punkter. Har den flere Understøtninger, kan man tænke sig den overskaaren paa disse Steder, og dens enkelte Stykker kunne da behandles hver for sig i Henhold til det foregaaende. Det er dog ikke ganske korrekt at forudsætte Bjælken eller Akslen overskaaren ved Understøtningerne, og blandt andet ville Beregningerne under denne Forudsætning give Tryk paa Understøtningerne af nogen anden Størrelse end de, som ville vise sig at virke, naar Bjælken ikke tænkes overskaaren.

Er saaledes en Bjælke paavirket af en jævnfordelt Belastning samt understøttet i flere Punkter, som ligge i indbyrdes ligestore Afstande, vil Forholdet være følgende:

Er der tre Understøtninger, ville disse faa Tryk paa henholdsvis  $\frac{3}{16}$ ,  $\frac{5}{8}$  og  $\frac{3}{16}$  af den samlede Belastning, naar Bjælken ikke er overskaaren, i Stedet for at de, naar Bjælken var overskaaren, vilde faa Tryk paa henholdsvis  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  og  $\frac{1}{4}$  af Belastningen.

Ved 4 Understøtninger blive Trykkene  $\frac{2}{15}$ ,  $\frac{11}{30}$ ,  $\frac{11}{30}$  og  $\frac{2}{15}$  i det første Tilfælde og  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  og  $\frac{1}{6}$  i det andet Tilfælde.

For 5 Understøtninger fordeler Belastningen sig med  $\frac{11}{112}$ ,  $\frac{32}{112}$ ,  $\frac{26}{112}$ ,  $\frac{32}{112}$  og  $\frac{11}{112}$  i første og  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$  og  $\frac{1}{8}$  i andet Tilfælde.

Endelig fordeler den sig ved 6 Understøtninger med  $\frac{15}{190}$ ,  $\frac{43}{190}$ ,  $\frac{37}{190}$ ,  $\frac{37}{190}$ ,  $\frac{43}{190}$  og  $\frac{15}{190}$  i første og  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{5}$  og  $\frac{1}{10}$  i andet Tilfælde.

#### 4. Ledsystemer.

Disse dannes af prismatiske Legemer, der ved de saakaldte Led eller Knuder ere forbundne med hverandre.

Ved Bestemmelsen af Paavirkningerne i Ledsystemets Stænger eller Ledstykker maa der tænkes kun at virke ydre Kræfter i Leddene. Stykkerne ville derved udelukkende blive sammentrykkede eller strakte.

Bliver et Stykke paavirket af Kræfter mellem Stykkets Led, maa man af Hensyn til Bestemmelsen af disse sammentrykkende eller strækkende Paavirkninger regne med de Tryk, som disse ydre Kræfter frembringe i Stykkets to Led, og da bagefter nærmere undersøge, hvilke andre Paavirkninger vedkommende Stykke faar foruden Længdepaavirkningen.

Ledsystemerne kunne nu enten være enkelte Ledsystemer, hvor kun to Stykker støde sammen i hvert Led, eller sammensatte Ledsystemer, hvor der i et eller flere Led støde flere Stykker sammen.

De enkelte Ledsystemer ere atter enten lukkede eller aabne. De lukkede kunne betragtes som materielle

Stangpolygoner uden Diagonaler, medens derimod de aabne Ledsystemer mangle een Side i Stangpolygonen, hvorfor de to Modstande maa falde i samme Linie som de yderste Sider i den ikke lukkede Stangpolygon.

Ved den grafiske Behandling af Ledsystemerne vil der, ligesom i de foregaaende Afsnit, til hver Opgave høre to Figurer, den ene, der er mærket Fig. a, indeholder Ledsystemet med Angivelse af Kraftlinierne for de ydre Kræfter, medens den anden mærket Fig. b, det saakaldte Diagram, angiver Størrelsen og Retningen af samtlige Kræfter, baade de givne ydre Kræfter og de i Ledsystemets enkelte Stykker fremkomne Spændinger. Paa Figurerne a ville de Stykker, som sammentrykkes, blive tegnede med tykke, de strakte derimod med tynde Linier, og i Figurerne b ville Betegnelserne paa de trykkede Stykker blive understregede.

*a. Enkelt lukkede Ledsystemer.*

Eksp. 37. Paa Fig. 59<sup>a</sup> er der vist et simpelt Spærfag, bestaaende af to Spær og een Bjælke. Paa Spærene hviler der en jævnfordelt Belastning af  $2P$ . Man skal finde Paavirkningerne i Spærfagets tre Stykker.

Vægten  $2P$  vil fordele sig saaledes paa Knuderne, at der i  $C$  kommer til at virke  $P$  og i hver af Knuderne  $A$  og  $B$   $\frac{1}{2}P$ , alle lodret nedad. Desuden ville Understøtningerne i hvert af Punkterne  $A$  og  $B$  frembringe en Reaktion lodret opad af Størrelse  $P$ . Der vil da i det hele i  $A$  virke  $P_3 = \frac{1}{2}P$  lodret opad, i  $C$   $P_1 = P$  lodret nedad og i  $B$   $P_2 = \frac{1}{2}P$  lodret opad.

Paavirkningerne i  $AC$  og  $BC$  kunne nu findes ved at opløse  $P_1$  efter disse Retninger, og Paavirkningen i  $AB$  ved at opløse  $P_2$  efter  $AB$  og  $BC$ . Sker dette, ville  $P_1$ 's Komposanter faa Retninger bort fra  $C$  og  $P_2$ 's Komposanter bort fra  $B$ . Men modsat disse Paavirkninger

maa der i Stykkerne  $4$ ,  $5$  og  $6$  af Materialet ydes lige saa store Modstande. Modstandene i  $4$  og  $5$  ville paa Fig. 59<sup>b</sup> med  $P_1$  danne en Kræfternes Trekant, hvis Sider gennemløbes kontinuert i den Retning, der er bestemt af  $P_1$ 's Retning.

Der er altsaa Ligevægt i  $C$  mellem  $P_1$  og Modstandene  $4$  og  $5$ . Paa samme Maade indser man let, at der i  $A$  maa være Ligevægt mellem  $P_3$ ,  $4$  og  $6$  og i  $B$  mellem  $P_2$ ,  $5$  og  $6$ . Den Retning, i hvilken Modstanden i vedkommende Stykke virker, er saaledes afhængig af den ydre Krafts Retning. Virker Modstanden ind imod Knuden, bliver Stykket trykket, virker den bort fra Knuden, bliver det strakt. I den til  $C$  svarende Trekant paa Fig. 59<sup>b</sup> ville Siderne gennemløbes i Ordenen  $1$ ,  $5$  og  $4$ . Modstanden vil altsaa i saavel  $4$  som  $5$  gaa ind imod  $C$ , og de to Spær ses saaledes at blive sammentrykkede. I den til  $B$  svarende Trekant ville Siderne gennemløbes i Ordenen  $2$ ,  $6$  og  $5$ ;  $6$  bliver strakt, da Modstanden gaar bort fra  $B$ .

Ved den ovenfor angivne Fremgangsmaade fandt man Spærfagets Stykker udelukkende paavirkede enten til Sammentrykning eller til Strækning, idet man, som overalt ved Behandlingen af Ledsystemer, forudsatte, at der kun angreb Kræfter i Knuderne. Man har derved set bort fra, at den paa Spærene jævnfordelte Belastning tillige vil paavirke disse til Bøjning, idet de maa betragtes som Bjælker understøttede i deres Endepunkter. Ved Dimensionsbestemmelsen af Spærfagets Stykker maa man selvfølgelig ogsaa tage Hensyn til den sidstomtalte Paavirkning.

Eksp. 38. En Svingkran, som bestaar af Stykkerne  $AB$ ,  $BC$  og  $AC$  (Fig. 60<sup>a</sup>), er understøttet i et Halsleje ved  $B$ , hvor Modstanden forudsættes kun at kunne ydes vandret, samt ved  $A$  i et Sporleje. Ved  $C$  hænger en Byrde  $1$ . Modstandene i Understøtningspunkterne og Paa-

virkningerne i Kranens enkelte Stykker skulle findes, idet der ikke tages Hensyn til Kranens Egenvægt.

Den vandrette Modstand 2 gennem  $B$  paa Fig. 60<sup>a</sup> skærer 1 i  $D$ . Herigennem maa Modstanden i  $A$  gaa, og dennes Kraftlinie bliver altsaa  $AD$ . Diagrammet paa Fig. 60<sup>b</sup> dannes paa følgende Maade: Ved Linier parallele med de i  $D$  sammenstødende Kraftlinier konstrueres den Trekant, som angiver Ligevægten mellem 1, 3 og 2. Om-løbsretningen er paa Trekantens Sider angiven ved Pile. Modstanden 3, der virker opad til højre, er derefter opløst i Modstandene 7 og 8. Herved bortfalder 3, og der ses nu at være Ligevægt mellem 1, 7, 8 og 2. Dernæst har man konstrueret den til Knuden  $C$  svarende Trekant, og endelig skal Linien 6 paa Fig. 60<sup>b</sup>, naar den tegnes fra Skæringspunktet mellem 4 og 5 til Skæringspunktet mellem 2, 3 og 8, blive parallel med 6 paa Fig. 60<sup>a</sup>, altsaa lodret. Denne Linie, som saaledes afslutter Diagrammet, kaldes Kontrollinien, da den vil afgive en Prøve paa Tegningens Rigtighed.

Til hver Knude paa Fig. 60<sup>a</sup> svarer der nu en Mangelkant paa Fig. 60<sup>b</sup>.  $AC$  vil blive trykket,  $AB$  og  $BC$  strakte. Modstandene 2 og 7 samt 1 og 8 danne ligestore Kraftpar, der virke til Omdrejning i modsatte Retninger og altsaa hæve hinandens Virkning.

#### b. De enkelte aabne Ledsystemer.

I disse kan der indgaa to eller flere Ledstykker.

Ekspl. 39. Fig. 61 viser en saakaldt Væggekran. Kraften 1 skal holde Ligevægt med Reaktionerne 4 og 5, som maa virke i Forlængelserne af 2 og 3, naar begge disse Stænger ere befæstede til Muren ved Led. 4 og 5 faa derved de paa Figurerne ved Pilene angivne Retninger. Men imellem de i 2 og 3 virkende Modstande og Kraften 1 skal der ogsaa være Ligevægt, hvorfor 2 bliver strakt og

3 sammentrykket. Der er naturligvis intet i Vejen for at variere Væggekranens Form ved f. Eks. enten at gøre 2 eller 3 vandret.

Ekspl. 40. Fig. 62<sup>a</sup> viser en Jordkran. Den vil, naar den kun bestaar af de to Stykker  $AB$  og  $BC$ , have stærk Tilbøjelighed til at vælte til Siden, med mindre der anbringes en Sideafstivning. En saadan kan tilvejebringes ved, at man opstiller to Stivere i Stedet for den ene  $BC$ . Disse danne da en spids Vinkel med hinanden og stilles saaledes, at et Plan gennem  $AB$  vinkelret paa de to Stiveres Plan halverer Vinklen mellem dem. 4 og 5, hvis Retninger ere angivne ved Pile, have samme Størrelse som 2 og 3. 2 bliver strakt og 3 trykket. Er  $BC$  lodret Billede af de to Ben, maa 3 tilsidst opløses efter disses Retninger.

Formen af en saadan Jordkran kan ogsaa varieres f. Eks. ved at gøre Benet  $AB$  bevægeligt. Der maa da i  $B$  og  $C$  anbringes Charniærer, medens  $A$  maa gøres forskydeligt i vandret Retning, eller  $AB$  kunne forlænges og forkortes.

Ekspl. 41. Fig. 63<sup>a</sup> viser en Hængebro. Brobanen  $AB$  med den derpaa hvilende jævnfordelte Belastning er delt i otte lige store Dele, der ved Stænger gennem Delenes Midtpunkter ere ophængte i et Tov eller en Stangkæde. Dennes ene Befæstelsespunkt  $C$  og Retningen for Modstanden derigennem kunne f. Eks. være givne, i hvilket Tilfælde Kædens eller Tovets Form samt de deri virkende Spændinger ville være bestemte.

Da Belastningerne ere jævnfordelte over Brobanen, maa deres Resultant gaa gennem dennes Midte, altsaa som  $EF$  paa Fig. 63<sup>a</sup>. Modstanden gennem  $C$  skærer  $EF$  i  $S$ , og herigennem maa da den anden Modstand  $SD$  virke.

I Fig. 63<sup>b</sup> ere de otte givne Kræfter afsatte efter hverandre paa den lodrette Linie  $GH$ . Derefter er Kraftpolygonen  $GHO$  dannet af de givne otte Kræfter og de to

Modstande 9 og 10. O gøres til Pol for denne Kraftpolygon, Polstraalerne tegnes og Stangpolygonen *I II III . . . . .* dannes dernæst ved Linier parallelle med disse Polstraaler. Kæden eller Tovet skal nu have netop den ved Stangpolygonen angivne Form og Længde, og dens enkelte Stykker ville da paavirkes af Kræfterne 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 og 10, alle til Strækning. Stangpolygonen bliver, da Polstraalerne ere Diagonaler i Kraftpolygonen, en saakaldt Middeltræklinie. De to yderste Sider i denne falde sammen med de to ydre Modstande.

*c. De sammensatte Ledsystemer.*

En lignende Forbindelse som den, der ved de enkelte Ledsystemer findes imellem Figurerne *a* og *b*, maa ogsaa eksistere ved de sammensatte Ledsystemer, hvor der altsaa 1) til hver Linie i den ene Figur svarer en dermed parallel i den anden, og 2) til hver Knude i den ene svarer en Mangelkant i den anden med lige saa mange Sider, som der er Linier sammenstødende i vedkommende Knude.

Ved de sammensatte Ledsystemer ville de indre Modstande i Stykkerne blive bestemte ved Hjælp af en stor Mængde Kraftpolygoner, som enten kunne tegnes hver for sig uden Forbindelse med hverandre, eller, hvad der er det almindeligste, fordi det yder en Kontrol paa Tegningens Rigtighed, som en samlet Figur, et Diagram, hvor to og to Kraftpolygoner have en Side fælles.

Vinklerne mellem Stykkerne i et Ledsystem, som det paa Fig. 64 viste, ville, hvad enten det indeholder begge Diagonalerne *BF* og *EC* eller kun den ene, ikke kunne forandres, uden at ogsaa Stykkernes Længder forandres. Systemet kaldes derfor uforanderligt. Er den ene Diagonal borte, siges Systemet at være geometrisk bestemt, idet man vil kunne konstruere det, naar man

kender Længden af alle Stykkerne og deres Følgeorden. Findes derimod begge Diagonalerne i Systemet, siges det at være geometrisk overbestemt, fordi den ene Diagonal er overflødig til Systemets Konstruktion; den kan uden Skade borttages og maa, for at kunne indgaa i Systemet, have en af de øvrige Stykker afhængig Længde. Mangle begge Diagonaler, og forudsættes alle Stykkerne at være drejelige om Knuderne, kaldes Systemet geometrisk ubestemt, idet Vinklerne i Firkanten *BCFE* kunne forandres, uden at Siderne samtidig undergaa nogen Forandring. Systemet er altsaa tillige foranderligt.

Som almindelig Regel gælder altsaa, at et Ledsystem er geometrisk bestemt, naar alle de mellem Ledstykkerne indesluttede Arealer ere Trekanter, liggende ved Siden af hinanden to og to med en Side fælles. Findes der derimod blandt Arealerne en eller flere Mangelkanter, er Systemet geometrisk ubestemt og tillige foranderligt og kan kun blive geometrisk bestemt ved Deling af Mangelkanterne ved Diagonaler i Trekanter. Findes der i et Ledsystem Ledstykker, som overskære hverandre, er Systemet endelig geometrisk overbestemt.

Naar et System er geometrisk bestemt, er det ogsaa statisk bestemt, hvilket vil sige, at Spændingerne i alle Ledstykker kunne findes, naar de i Knuderne virkende Kræfter ere bekendte og indbyrdes i Ligevægt.

I Konstruktioner foretrækkes altid de geometriske uforanderlige Systemer. Er man nødsaget til at anvende geometrisk foranderlige Systemer, bøder man paa det uheldige ved dem paa den Maade, at man gør nogle enkelte eller samtlige Knuder stive, hvorved Systemerne imidlertid ophøre at være Ledsystemer og gaa over til at blive stive Systemer.

Bestemmelsen af Paavirkningerne i et Ledsystems enkelte Stykker kan enten foretages ved Hjælp af den



grafiske Metode eller ad Beregningens Vej ved den saakaldte Snitmetode.

Ved Benyttelsen af den grafiske Metode bør man, af Hensyn til en heldig Ordning af Diagrammets enkelte Dele, iagttage:

- 1) at Linierne for de ydre Kræfter paa Figurerne a ikke forlænges ind over Knuderne. Trykker en Kraft paa en Knude, skal Kraftliniens Endepunkt findes i Knuden. Trækker Kraften i Knuden, skal dens Udgangspunkt ligge i den.
- 2) at Kræfterne i Figurerne b netop tegnes i den Orden, i hvilken de findes tegnede paa Figurerne a.

Ekspl. 42. En armeret Bjælke med to Støtter. En saadan er vist paa Fig. 65<sup>a</sup>. Der antages at virke i *B* en Vægt  $P = 2400$  kg og i *C* en Vægt  $Q = 1800$  kg. Til at holde Ligevægt med disse Kræfter maa Understøtningen ved *D* udøve en Reaktion  $R = 2000$  kg og Understøtningen ved *A* en Reaktion  $S = 2200$  kg; disse Reaktionen findes paa samme Maade som Reaktionen ved belastede Bjælker.

I dette Eksempel skal saavel den grafiske Metode som Snitmetoden blive anvendte.

Den grafiske Metode:

Man tegner først den Kraftpolygon, som angiver Ligevægten mellem Kræfterne *P*, *Q*, *R* og *S*; denne Kraftpolygon er paa Fig. 65<sup>b</sup> vist med tykke Linier; dernæst tegnes efterhaanden de til Knuderne svarende Kraftpolygone, som angive Ligevægten mellem de i vedkommende Knude virkende Kræfter, idet man iagttager, at den i det foregaaende med Hensyn til Kræfternes Orden angivne Regel overholdes. De i en Knude

virkende Kræfter bestaa dels af de i den virkende ydre Kræfter dels af de i Knudens Ledstykker virkende Modstande. Den Orden, i hvilken Kraftpolygone tegnes, er ligegyldig, men man skal dog bemærke, at man ikke kan tegne nogen Polygon, der indeholder flere end to ubekendte Sider. Man maa saaledes begynde enten med den til *A* eller den til *D* svarende Kraftpolygon. Begynder man med den sidste, maa man derefter først tegne Kraftpolygonen svarende til Knuden *E*, da der, efterat *m* er funden ved Hjælp af den til *D* svarende Kraftpolygon, kun angriber to ubekendte Kræfter i *E*, medens der i *C* angriber tre. Naar *g* er funden, kan man gaa til den til *C* svarende Polygon, eftersom der i denne nu kun indgaar de to ubekendte *d* og *e*.

Til Knuden *D* paa Fig. 65<sup>a</sup> svarer paa Fig. 65<sup>b</sup> Polygonen *Rhm*; *h* maa gaa ud fra det Punkt, hvor *R* og *Q* støde sammen, fordi *h* skal indgaa i en Polygon med saavel *R* som *Q*. Da den Orden, i hvilken Stykkerne nævnes, angiver Omløbsretningen i Polygonens Omkreds, som er bestemt ved *R*'s Retning, indser man, at *h* bliver trykket, eftersom Modstanden i den gaar ind imod *D*, medens *m* bliver strakt, da Modstanden gaar bort fra *D*. Til *E* svarer Trekanten *mgf*; *g* bliver trykket og *f* strakt. Til *C* svarer *ghQde*, *d* bliver trykket og *e* strakt. Til *F* svarer *fecb*, hvor *c* trykkes og *b* strækkes. Til *B* svarer *cdPa*, hvor *a* trykkes. Linien *a*'s Beliggenhed paa Fig. 65<sup>b</sup> er bestemt, saasart alle de øvrige Kræfter ere tegnede. Trækkes en ret Linie fra Skæringspunktet mellem *P* og *S* til Skæringspunktet mellem *b* og *c*, skal den vise sig at blive parallel med *a* paa Fig. 65<sup>a</sup>, ifald Tegningen er rigtig. *a* vil altsaa paa Diagrammet blive Kontrollinien. Som fremhævet i Begyndelsen af Afsnittet om Ledsystemer, maa der, for at Bevægelse ikke skal finde Sted, i hver Knude være Ligevægt mellem de i den virkende ydre Kræfter og de

Modstande, som Materialet i de Ledstykker, der støde sammen i vedkommende Knude, maa yde mod de i Stykkerne fremkaldte Spændinger, hvorfor der ogsaa ved den grafiske Bestemmelse af disse Modstande for hver enkelt Knudes Vedkommende tegnes en Kraftpolygon, som angiver denne Ligevægt.

Ved den saakaldte Snitmetode ligger den samme Betragtning til Grund for Bestemmelsen af Modstandene og dermed af Spændingerne i Ledstykkerne, men her tænkes en Del af Ledsystemet ved et Snit skilt fra Resten af Systemet. For at den tilbageblevne Del til Trods herfor skal kunne være i Ligevægt (svæve frit), maa man paa de Steder, hvor Ledstykker ere overskaarne, anbringe ydre Kræfter af samme Størrelse og Retning som de Modstande, der ved Overskæring af Stykkerne ere faldne bort. Disse Modstande er det netop, som skulle bestemmes, hvilket kan ske ved at opstille de tre Ligninger, som ere Betingelsen for Ligevægten mellem de paa den tilbageblevne Del af Ledsystemet virkende ydre Kræfter og de i de overskaarne Stykker virkende ubekendte Modstande, der nu ogsaa fremtræde som ydre Kræfter. Af disse tre Ligninger kan der kun bestemmes tre Ubekendte, og der maa altsaa i Ligningerne kun indgaa tre ubekendte Modstande. Et Snit, som deler Ledsystemet i to Dele, maa altsaa i det højeste overskære tre Ledstykker, i hvilke Modstandene ere ubekendte. I Stedet for at benytte alle tre Ligevægtsligninger foretrækker man imidlertid som oftest at benytte Momentligningen alene, da man ved de tre Momentligninger, som faas med Hensyn til tre forskellige Punkter, kan finde de tre ubekendte Modstande. Beregningen af disse kan yderligere lattes, naar man kan vælge hver af Momentpolerne saaledes, at Momenterne af de to Modstande med Hensyn til vedkommende Pol blive Nul. Ved Opstillingen af disse Momentligninger

regnes Modstandene i de overskaarne Stykker altid bort fra den Knude, hvorfra de udgaa. Faar man da ved Beregningen en positiv Værdi for en Modstand, gaar denne bort fra Knuden, og Stykket strækkes; bliver Modstandens Værdi negativ, virker den ind imod Knuden og Stykket sammentrykkes.

Lægger man saaledes i Ledsystemet (Fig. 65<sup>a</sup>) Snittet  $MN$ , vil det overskære  $a$  og  $b$ . Den Del af Ledsystemet, som ligger til højre for  $MN$ , tænkes borttagen, og i Endepunkterne af de tilbageblevne Stykker af  $a$  og  $b$  anbringes ydre Kræfter, begge virkende bort fra  $A$ . Gøres  $F$  til Momentpunkt, bliver Momentligningen for Kræfterne  $S$ ,  $a$  og  $b$

$$S \cdot 3 + a \cdot 0,9 + b \cdot 0 = 0;$$

$$a = -\frac{3S}{0,9} = -\frac{22000}{3} = -7333 \text{ kg.}$$

$$\text{tg } v = \frac{0,9}{3} = 0,3. \quad v = 16,7^\circ.$$

Tages  $B$  til Momentpunkt, bliver Momentligningen

$$S \cdot 3 - b \cdot 3 \sin v + a \cdot 0 = 0;$$

$$b = \frac{S}{\sin v} = \frac{2200}{\sin 16,7^\circ} = 7654 \text{ kg.}$$

Modstanden i  $a$  gaar altsaa ind imod Knuden og  $a$  trykkes, medens Modstanden i  $b$  gaar bort fra Knuden og  $b$  strækkes.

I det følgende udelades de Led i Momentligningerne, som blive Nul ved, at Momentarmen er Nul.

Til Bestemmelse af  $c$  og  $d$  lægges Snittet  $OG$ , og den til højre derfor liggende Del af Systemet tænkes borttagen.

Gøres  $A$  til Momentpunkt, vil Momentligningen, idet Modstanden  $c$  antages at virke lodret nedad, blive

$$2400 \cdot 3 + c \cdot 3 = 0, \quad \text{hvoraf } c = -2400 \text{ kg.}$$

Tages  $F$  til Momentpunkt, faar man Ligningen

$$2200 \cdot 3 + d \cdot 0,9 = 0. \quad d = -7333 \text{ kg.}$$

$c$  og  $d$  sammentrykkes.

Til Bestemmelse af  $e$  og  $f$  lægges Snittet  $JL$ , og den højre Del af Systemet tænkes borte.

Tages  $C$  til Momentpunkt, faar man Ligningen

$$2200 \cdot 6 - 2400 \cdot 3 - f \cdot 0,9 = 0.$$

$$f = \frac{2200 \cdot 6 - 2400 \cdot 3}{0,9} = 6667 \text{ kg. } f \text{ strækkes.}$$

Ved at tage  $E$  til Momentpunkt faar man Momentligningen

$$2200 \cdot 6 - 2400 \cdot 3 + d \cdot 0,9 + e \cdot 3 \sin v = 0,$$

idet  $e$  antages at virke bort fra  $F$ . Indsætter man heri  $d = -7333$ , faar man

$$e = \frac{2400 \cdot 3 + 7333 \cdot 0,9 - 2200 \cdot 6}{3 \sin v} = \frac{200}{\sin 16,7^\circ} \\ = 695,8 \text{ kg. } e \text{ strækkes.}$$

Til Bestemmelse af  $g$  og  $h$  lægges Snittet  $HT$ , og venstre Del af Systemet tænkes borte. Tages  $D$  til Momentpunkt, faar man, idet  $g$  antages at virke lodret opad, Ligningen

$$f \cdot 0,9 + g \cdot 3 = 0, \text{ hvoraf } g = -\frac{f \cdot 0,9}{3} = -2000 \text{ kg,}$$

naar man i Ligningen sætter  $f = 6667$ .  $g$  sammentrykkes.

Tages  $E$  til Momentpunkt, faar man Ligningen

$$h \cdot 0,9 + 2000 \cdot 3 = 0; h = -\frac{2000 \cdot 3}{0,9} = -6667 \text{ kg.}$$

$h$  sammentrykkes.

Lægger man endelig Snittet  $UV$ , og tænkes Systemets venstre Del borte, faar man, naar  $C$  tages til Momentpunkt, Ligningen

$$m \cdot 3 \sin v - 2000 \cdot 3 = 0.$$

$$m = \frac{2000 \cdot 3}{3 \sin v} = \frac{2000}{\sin 16,7^\circ} = 6958 \text{ kg.}$$

$m$  strækkes.

Ekspl. 43. Paa Fig. 66<sup>a</sup> er der vist en armeret Bjælke med een Støtte.

I  $B$  virker Vægten  $P$  og i  $A$  og  $C$  henholdsvis Modstandene  $R$  og  $Q$ .

Paa Fig. 66<sup>b</sup> har man først tegnet den til disse svarende Kraftpolygon.

Til Knuden  $A$  svarer  $Rab$ ;  $a$  trykkes,  $b$  strækkes.

Til Knuden  $B$  svarer  $aPdc$ , baade  $c$  og  $d$  trykkes, og til  $C$  svarer  $dQe$ , hvor  $e$  strækkes.

Ved de armerede Bjælker gøres selve Bjælkerne af Smedejærn eller Træ, Støtterne af Støbejærn, Smedejærn eller Træ og Baandene af Smedejærn.

Ekspl. 44. Fig. 67<sup>a</sup> viser et dobbelt Hængeværk. I  $B$  og  $C$  virke henholdsvis  $P$  og  $Q$ , hvorefter Reaktio-nerne  $R$  og  $S$  findes. Efter at den til disse fire Kræfter svarende Kraftpolygon er tegnet paa Fig. 67<sup>b</sup>, ere de til de enkelte Knuder svarende Kraftpolygoner fundne. Til  $A$  svarer  $Sba$ ,  $a$  trykkes og  $b$  strækkes; til  $E$  svarer  $acd$ ,  $c$  strækkes og  $d$  trykkes; til  $B$  svarer  $cbPe$ , hvor  $e$  strækkes; til  $C$  svarer  $eQhf$ , baade  $h$  og  $f$  strækkes; til  $F$  svarer  $dfg$ , hvor  $g$  trykkes; endelig svarer til  $D$  Trekanten  $Rgh$ .  $h$  er Kontrollinien.

De to armerede Bjælker og Hængeværket paavirkes ofte af en over Bjælken jævnfordelt Belastning, der i saa

Fald af Hensyn til Bestemmelsen af de sammentrykkende og strækkende Paavirkninger, som komme til at virke i Systemets forskellige Stykker, tænkes fordelt paa Bjælkens Knuder paa den Maade, at den Belastning, som hviler paa et mellem to Knuder liggende Bjælkestykke, fordeles med Halvdelen til hver Knude. Bjælken tænkes altsaa i saa Fald overskaaren i vedkommende Knude. Var den jævnfordelte Belastning paa Bjælken i Fig. 65<sup>a</sup>  $K$ , vilde i dette Tilfælde saavel  $P$  som  $Q$  være blevne  $\frac{K}{3}$ , hvorhos der i  $A$  og  $D$  vilde virke  $\frac{K}{6}$  lodret nedad paa hvert af Stederne. Da der desuden i  $A$  og  $D$  virke Reaktioener lodret opad af Størrelse  $\frac{K}{2}$ , faa de Reaktioener, som skulle holde Ligevægt med  $P$  og  $Q$ , Størrelsen  $\frac{K}{2} - \frac{K}{6} = \frac{K}{3}$ .

Da man ved Diagrammets Bestemmelse ganske ser bort fra, at Belastningen muligvis er jævnfordelt, maa man senere ved Bestemmelsen af Stykkernes Tværsnitsdimensioner tage Hensyn til en saadan paa Ledstykket virkende jævnfordelt Belastning. Tværsnitsdimensionerne af de tre Stykker  $AB$ ,  $BC$  og  $CD$  vilde i saa Fald være at beregne saavel for den paa Diagrammet fundne sammentrykkende Paavirkning som for Bøjning, idet Stykkerne hvert for sig ere Bjælker med jævnfordelt Belastning, understøttede ved Enderne og med et fritliggende paa 3 m.

Bjælken  $AD$  danner iøvrigt i Almindelighed eet Stykke, i hvilket Tilfælde man overalt maa give den samme Tværsnitsdimensioner, som det stærkest paavirkede Stykke vilde faa.

Hvilede der paa de paa Fig. 66<sup>a</sup> og Fig. 67<sup>a</sup> som  $AC$  og  $AD$  betegnede Bjælker en jævnfordelt Belastning  $K$ , vilde  $P$  for Fig. 66's Vedkommende blive lig med  $\frac{K}{2}$

og virke lodret nedad, medens  $Q$  samt  $R$  hver blev  $\frac{K}{4}$ , virkende lodret opad; ved Hængeværket paa Fig. 67<sup>a</sup> bliver  $P = Q = \frac{K}{3}$  og  $R = S = \frac{K}{3}$ , de to første virkende lodret nedad, de to sidste lodret opad. I disse Tilfælde ville Stykkerne af Bjælken  $AC$  (Fig. 66<sup>a</sup>) være at beregne saavel for Sammentrykning som for Bøjning, medens Bjælken  $AD$ 's Stykker (Fig. 67<sup>a</sup>) maa beregnes for saavel Strækning som Bøjning.

Ekspl. 45. Fig. 68<sup>a</sup> viser det saakaldte enkelte Sprængeværk, hvor Bjælken  $AC$  i Midten understøttes af to Skraastivere, der i Punkterne  $D$  og  $E$  skulle overføre en Del af den paa Bjælken hvilende Belastning paa Sidemurene. Antages der paa  $AC$  at hvile en jævnfordelt Belastning  $K$ , vil  $P$  blive  $\frac{K}{2}$ , og der vil i  $A$  og  $C$  direkte overføres et Tryk af  $\frac{K}{4}$  paa hver af Sidemurene. Til at modstaa  $P$  maa der gennem Skraastiverne  $EB$  og  $DB$  virke Modstande, som ere kaldte henholdsvis  $Q$  og  $R$ . Disses Størrelser ere fundne paa Fig. 68<sup>b</sup>, hvor det ligeledes er angivet, at Stiverne  $a$  og  $b$  paavirkes til Sammentrykning af Kræfter af samme Størrelse som  $Q$  og  $R$ . Bjælken  $AC$ 's to Dele  $AB$  og  $BC$  blive ikke Genstand for nogen sammentrykkende eller strækkende Paavirkning, men de paavirkes hver for sig kun af en jævnfordelt Belastning  $\frac{K}{2}$ . De maa altsaa beregnes som Bjælker understøttede ved Enderne, med Spændvidde  $AB$  og  $BC$  og paavirkede af en jævnfordelt Belastning.

Ekspl. 46. Paa Fig. 69<sup>a</sup> er der fremstillet et dobbelt Sprængeværk. Her understøttes Bjælken  $AD$  foruden

ved Enderne i de to Punkter  $B$  og  $C$ . For saa vidt' der paa Bjælken hviler en jævnfordelt Belastning  $K$ , ville  $P$  og  $Q$  hver blive  $\frac{K}{3}$ , medens enhver af Murene ved  $A$  og  $D$  vil modtage et lodret Tryk af  $\frac{K}{6}$ . Fig. 69<sup>b</sup> viser med tykke Linier den Kraftpolygon, som angiver Ligevægten mellem Vægtene  $Q$  og  $P$  samt Modstandene  $S$  og  $R$ . Til Knuden  $B$  svarer Krafttrekanten  $Pab$ , hvor altsaa baade  $a$  og  $b$  trykkes. Til  $C$  svarer  $Qbc$ ,  $c$  trykkes saaledes ogsaa. Bjælken  $AD$ 's Stykker paavirkes udelukkende af den jævnfordelte Belastning. Ved det dobbelte Sprængeværk udelades undertiden Stykket  $b$ , i hvilket Tilfælde Bjælkestykket  $BC$  foruden at paavirkes af den jævnfordelte Belastning tillige maa optage den sammentrykkende Paavirkning, som ellers Stykket  $b$  vilde blive Genstand for.

Ekspl. 47. Fig. 70<sup>a</sup> viser en Kran, som er støttet foroven ved  $A$  i et Halsleje og fornedet ved  $B$  i et Sporleje, medens der i  $C$  virker en Byrde  $P_1$ . Kranens Egenvægt  $P_2$  tænkes virkende gennem dens Tyngdepunkt. Ved Hjælp af Polstraalerne til Polen  $p$  paa Fig. 70<sup>b</sup> og den til disse svarende Stangpolygon  $I II IV$  paa Fig. 70<sup>a</sup> findes Beliggenheden af Resultanten af  $P_1$  og  $P_2$ . Denne skærer den vandrette Reaktion  $P_3$  gennem  $A$  i Punktet  $D$ , hvorigennem den i  $B$  virkende Reaktion  $P_4$  maa gaa. Paa Fig. 70<sup>b</sup> er dernæst  $P_4$  opløst i Reaktionen  $P_5$  lodret opad og  $P_6$  vandret.  $P_1, P_2, P_3, P_5$  og  $P_6$  ere indbyrdes i Ligevægt. Paa Fig. 70<sup>c</sup> har man ved de to Reaktionen  $P_3$  og  $P_6$ , ved de til Polen  $p_1$  trukne Polstraaler og ved Stangpolygonen  $III VI VIII VII$  bestemt Paavirkningerne  $P_7$  i  $E$  og  $P_8$  i  $F$ . Bøjningsmomenterne for de enkelte Tværsnit af Kranstammen faar man paa sædvanlig Maade ved Produktet af Polafstanden for  $p_1$  og de Stykker, som Stangpolygonen  $III VI VIII VII$  afskærer paa Linier parallele

med  $P_7$  og  $P_8$ . Sluttelig ere Paavirkningerne  $P_9$  i Baandet  $EC$  og  $P_{10}$  i Stiveren  $CF$  fundne paa Fig. 70<sup>c</sup>, idet  $P_7$  maa være  $P_9$ 's ene Komposant, medens den anden Komposant virker efter  $EA$ , og  $P_8$  maa være  $P_{10}$ 's ene Komposant, medens den anden virker efter  $FB$ .

Resultatet af det udviklede vil altsaa være, at  $FC$  paavirkes til Sammentrykning,  $CE$  til Strækning,  $BF$  til Sammentrykning, Bøjning og Forskydning,  $EF$  til Strækning, Bøjning og Forskydning og endelig  $AE$  til Bøjning og Forskydning.

De sammensatte Ledsystemer forekomme, foruden i de anførte og lignende Konstruktioner, navnlig i Tagværker som de saakaldte Spærfag samt i Broer som Gitterdragere.

Forinden specielle Eksempler paa saadanne Konstruktioner anføres, skal man omtale, hvilke ydre Belastninger, der kunne komme til at hvile paa dem.

Ved Spærfag forstaas de i Tagværker indgaaende Hoveddragere, som bære Tagbeklædningen med den derpaa kommende tilfældige Belastning, og som overføre den samlede Vægt paa de Mure eller Søjler, der bære Taget. Hele Belastningen tænkes i de følgende Eksempler fordelt paa Spærets enkelte Knuder paa den Maade, at Vægten af de enkelte Ledstykker med den derpaa hvilende Belastning fordeles med Halvdelen til hver af de to Knuder, til hvilke Ledstykket støder. Spærene tænkes altsaa overskaarne ved Knuderne. Vil man behandle dem som værende i eet Stykke, maa Belastningen fordeles som angivet Side 70—71 (Clapeyron).

Belastningen paa Spærfaget hidrører som bemærket først og fremmest fra Tagets Egenvægt, der afhænger af Tagkonstruktionens Art, de Materialer, som indgaa i Tagkonstruktionen, og Afstanden mellem Spærfagene.

Paa Tabel XI. A. findes anført Tages Egenvægt i  $\text{kg/m}^2$  af Tagets Horisontalprojektion.

Heri indgaar dog ikke selve Spærfagenes Vægt, som man ved en foreløbig Beregning kan sætte til 10 à 25 kg/m<sup>2</sup> af Tagfladens Horizontalprojektion.

Den tilfældige Belastning hidrører dels fra Snetryk og dels fra Vindtryk.

Snevægten ansættes til højest 75 kg/m<sup>2</sup> af Tagets Horizontalprojektion.

Vinden kan antages at virke skraat nedad i en Retning af 10° med det vandrette Plan. Paa et faststaaende Plan, der er vinkelret paa dens Retning, vil den udøve et Tryk  $p = 0,12248 V^2$  i kg/m<sup>2</sup>, naar  $V$  betegner Vindens Hastighed i Meter pr. Sekund. Vindtrykket kan ved Bygningskonstruktioner passende regnes at være ikke under 125 kg/m<sup>2</sup>; ved høje og isoleret liggende Bygninger saasom Skorstene kan det stige til 250 kg/m<sup>2</sup>, i særlige Tilfælde endogsaa højere.

Ofte nøjes man med at regne med Vindtrykkets lodrette Komposant, idet man ser bort fra den vandrette Komposant. For dette Tilfælde er der paa Tabel XI, B. angivet Totalbelastningen ved almindelige Bygninger, altsaa Tagets Egenvægt, Snetryk og Vindtrykkets lodrette Komposant i kg/m<sup>2</sup>.

Gitterdragerne benyttes navnlig ved Broer til at bære selve Brobanen (Tværdragere, Længdedragere og Brodække) samt den derpaa hvilende tilfældige Belastning, der afhænger af Broens forskellige Anvendelse, om den er en Gangbro, en Vejbro eller en Jærnbanebro.

Ved Gangbroer regner man, at den største tilfældige Belastning vil fremkomme, naar Broen er tæt pakket med Mennesker. Belastningen kan da sættes til 500 kg/m<sup>2</sup>. Egenvægten af saadanne Gangbroer af lettere Konstruktion kan ved en foreløbig Beregning anslaaes til

$$p = (120 b + 1,5 l^2 + 60) \text{ kg pr. løb. Meter af Broen, (12)}$$

hvor  $b$  er Afstanden mellem Gitterdragerne og  $l$  disses fritliggende, begge udtrykte i Meter. Ved Vejbroer og Jærnbanebroer maa Belastningen gøres til Genstand for mere indgaaende Undersøgelser. Den samlede Vægt, som kommer til at hvile paa en Gitterdrager, fordeles paa dennes enkelte Knuder paa den ved Spærfagene angivne Maade.

Ekspl. 48. Fig. 71<sup>a</sup> viser et Spærfag med Hanebjælke. I Knuderne  $B$ ,  $C$  og  $D$  virke de ligestore Vægte  $T$ ,  $P$  og  $Q$  lodret nedad, medens der i  $A$  og  $E$  virke Reaktionen  $S$  og  $R$  lodret opad, hver lig  $\frac{1}{2}(T + P + Q)$ .

Til Knuden  $A$  paa Fig. 71<sup>a</sup> svarer paa Fig. 71<sup>b</sup>:

—	—	$B$	—	—	—	$aTbe$
—	—	$C$	—	—	—	$bPc$
—	—	$D$	—	—	—	$cQde$
—	—	$E$	—	—	—	$dRf$

$a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  og  $e$  trykkes, medens  $f$  strækkes. Hvis Tagkonstruktionen er indrettet saaledes, at der i Knuderne er anbragt Aase mellem Spærfagene, og naar Tagbeklædningens Vægt samt den tilfældige Belastning gennem Over-spær overføres til disse Aase og derfra til Knuderne, blive Spærenes Dele kun paavirkede til Sammentrykning. Findes der Aase mellem Knudepunkterne, paavirkedes Spærene tillige til Bøjning. Hviler Tagbeklædningen paa Lægter, der direkte ere befæstede til Spærene, virker der paa Spærenes Stykker foruden de ved Diagrammet fundne sammentrykkende Paavirkninger tillige en jævnfordelt Belastning til Bøjning. Spærene betragtes ved Bestemmelsen af deres Tværsnitsdimensioner som overskaarne ved  $B$  og  $D$ . Tagbjælkerne  $f$  beregnes for Strækning, med mindre de danne Underlag for et Gulv, hvorpaa der kommer til at hvile en

Belastning, i hvilket Tilfælde de tillige ville paavirkes til Bøjning.

Alle Spærfagets Dele gøres af Træ.

Ekspl. 49. Fig. 72<sup>a</sup> viser et Spærfag med tre Trækstænger.

De ydre Kræfters Polygon er  $PQR$ . Følger man Knuderne paa Fig. 72<sup>a</sup> fra venstre til højre, faar man paa Fig. 72<sup>b</sup> efterhaanden Polygonerne:  $Rab$ ;  $aPdc$ ;  $bce$ ;  $e$  er Kontrollinien.  $a$  og  $d$  trykkes, medens  $b$ ,  $c$  og  $e$  strækkes. Alle Stykkerne kunne passende gøres af Smedejærn.

Ekspl. 50. Paa Fig. 73<sup>a</sup> er der vist et enkeltstøttet Spærfag med tre Trækstænger. Den af de ydre Kræfter dannede Polygon er paa Fig. 73<sup>b</sup>  $QPTSR$ . Følger man Knuderne paa Fig. 73<sup>a</sup> fra højre til venstre, ville Kraftpolygonerne paa Fig. 73<sup>b</sup> blive:  $Rhi$ ;  $hQfg$ ;  $fPde$ ;  $dTac$ ; endelig bliver  $b$  Kontrollinien. Til den midterste Knude svarer Polygonen  $gecbi$ .  $a, d, f, h, c$  og  $g$  trykkes, medens  $b, i$  og  $e$  strækkes. Spærene og Støtterne kunne være af Træ eller Smedejærn, Trækstængerne af Smedejærn.

Ekspl. 51. Fig. 74<sup>a</sup> viser et Schweitzer Hanebjælkefag uden Tagbjælke.

De ydre Kræfters Polygon er  $QPTSR$ . Følger man paa Fig. 74<sup>a</sup> Knuderne fra højre til venstre, faar man paa Fig. 74<sup>b</sup> Polygonerne:  $Rab$ ;  $aQdc$ ;  $dPfe$ ;  $fTig$ ;  $iSh$ ;  $bcegh$ .  $h$  bliver Kontrollinien.  $a, c, d, f, g$  og  $i$  trykkes, medens  $b, e$  og  $h$  strækkes.

Ekspl. 52. Fig. 75<sup>a</sup> viser et Spærfag med fem Trækstænger.

Den af de ydre Kræfter paa Fig. 75<sup>b</sup> dannede Polygon

er  $PQR$ , og de til Knuderne paa Fig. 75<sup>a</sup> svarende Polygoner paa Fig. 75<sup>b</sup> ville fra venstre til højre blive:  $Rab$ ;  $bcd$ ;  $caPfe$ ;  $deg$ ;  $Qgf$ .  $g$  er Kontrollinien.  $a$  og  $f$  trykkes.  $b, c, d, e$  og  $g$  strækkes.

Ekspl. 53. Fig 76<sup>a</sup> viser et fransk enkeltstøttet Spærfag med fem Trækstænger.

Tagets Højde  $h$  er 3 m og dets Spændvidde  $l$  er 9 m, altsaa Forholdet mellem dem  $\frac{1}{3}$ . Ifølge Tabel XI. B. kan Totalbelastningen, naar Taget tænkes dækket med Skifer, i saa Fald regnes til 210 kg/m<sup>2</sup>, hvortil kommer Spærfagets egen Vægt, der ansættes til 10 kg/m<sup>2</sup>, altsaa ialt 220 kg/m<sup>2</sup> af Horisontalprojektionen. Afstanden mellem Spærfagene tænkes at være 4 m. Paa hvert Spærfag kommer altsaa Belastningen paa en Tagflade, hvis vandrette Billede er  $4 \cdot 9 = 36$  m<sup>2</sup>. Hele Belastningen paa Spæret bliver saaledes  $36 \cdot 220 = 7920$  kg. Regnes den til 8000 kg, virker der i  $B, C$  og  $D$  2000 kg og i  $A$  og  $E$  1000 kg lodret nedad, medens der i  $A$  og  $E$  virker 4000 kg lodret opad, som sammensatte med de 1000 kg lodret nedad give Kræfter paa 3000 kg lodret opad. Altsaa er  $T = P = Q = 2000$  kg og  $R = S = 3000$  kg.

Paa Fig. 76<sup>b</sup> er Diagrammet tegnet.

Til $A$	paa Fig. 76 <sup>a</sup>	svarer paa Fig. 76 <sup>b</sup> :	$Sab$
— $B$	—	—	: $aTdc$
— $F$	—	—	: $bceh$
— $C$	—	—	: $edPfg$
— $D$	—	—	: $fQki$
— $G$	—	—	: $hgil$

$l$  er Kontrollinien;  $a, c, d, f, k$  og  $i$  trykkes, medens  $b, e, h, g$  og  $l$  strækkes.

I dette Eksempel er foruden den grafiske Metode ogsaa Snitmetoden angiven.

Til Bestemmelse af  $a$  og  $b$  lægges Snit  $I II$ , og højre Del af Spærfaget tænkes borte. For  $F$  som Momentpol faar man

$$3000 \cdot m + a \cdot BF = 0, \text{ hvoraf } a = -\frac{3000 \cdot m}{BF},$$

og for  $B$  som Momentpol

$$3000 \cdot 2,25 - b \cdot BH = 0, \text{ hvoraf } b = \frac{3000 \cdot 2,25}{BH}.$$

Lægges Snittet  $III IV$ , og tænkes højre Del af Spærfaget borte, faar man for  $A$  som Momentpol

$$2000 \cdot 2,25 + c \cdot AB = 0, \text{ hvoraf } c = -\frac{2000 \cdot 2,25}{AB},$$

og for  $F$  som Momentpol

$$3000 \cdot m - 2000 \cdot n + d \cdot BF = 0,$$

$$\text{hvoraf } d = \frac{2000 \cdot n - 3000 \cdot m}{BF}.$$

Lægges endelig Snittet  $V VI$ , og højre Del af Spærfaget tænkes borte, faar man, naar  $C$  tages til Momentpol,

$$3000 \cdot 4,5 - 2000 \cdot 2,25 - h \cdot 2,7 = 0,$$

$$\text{hvoraf } h = \frac{3000 \cdot 4,5 - 2000 \cdot 2,25}{2,7},$$

og, naar  $A$  tages til Momentpol,

$$2000 \cdot 2,25 + h \cdot 0,3 - e \cdot y = 0,$$

$$\text{hvoraf } e = \frac{2000 \cdot 2,25 + h \cdot 0,3}{y}.$$

Heri maa indføres den for  $h$  fundne Værdi. Da  $a$ ,  $c$  og  $d$  ere negative, blive de trykkede, medens  $b$ ,  $e$  og  $h$ , der ere positive, strækkes.

Udføres Tegningen nøjagtigt i et ikke for lille Maalestoksforhold, kunne de i de ovenfor fundne Udtryk indgaaende ubekendte Længder maales paa Tegningen, men det er selvfølgelig det nøjagtigste at beregne dem.

Naar man har fundet Modstandene i  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  og  $h$ , ere paa Grund af Symmetrien i Spærfag og Belastning ogsaa Modstandene og dermed Spændingerne i de øvrige Stykker bekendte.

Eksp. 54. Paa Fig. 77 er der vist et belgisk Spærfag med tostøttet Spær.

De i Knudepunkterne virkende ydre Kræfter ere  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  og  $T$  samt Reaktionen  $S$  og  $R$ . Polygonerne, som svare til de enkelte Knuder, nævnedes fra højre til venstre, blive:  $TopS$ ;  $oQmn$ ;  $mPkl$ ;  $pnlh$ ;  $ikOfg$ ;  $fNde$ ;  $dMac$ ;  $hgceb$  og  $LRba$ .  $b$  er Kontrollinien;  $b$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$  og  $p$  strækkes, medens de øvrige sammentrykkes.

Eksp. 55. Fig. 78 viser et Halvtag, som i  $A$  tænkes hvilende paa Muren, medens det ved  $B$  er fastgjort ind i Muren paa en saadan Maade, at der her kun kan ydes en Modstand i vandret Retning. De ydre Kræfter ere  $M$ ,  $N$ ,  $O$  og  $P$ . Deres Resultant er  $Q$ , som skærer den vandrette Modstand gennem  $B$  i  $C$ ; Modstanden i  $A$  maa altsaa virke efter Linien  $AC$ . Ligevægten mellem de ydre Kræfter er angiven paa Fig. 78<sup>b</sup> ved Polygonen  $PONMSR$ . Til de forskellige Knuder paa Fig. 78<sup>a</sup>, tage fra højre til venstre Side, svare paa Fig. 78<sup>b</sup> følgende Polygone:  $Pab$ ;  $aOdc$ ;  $bcef$ ;  $edNkg$ ;  $fgih$ ;  $ikMSl$ .  $l$  er Kontrollinien.  $a$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $i$  og  $k$  strækkes og de andre sammentrykkes.

Eksp. 56. Fig. 79<sup>a</sup> fremstiller et fransk Spærfag med trestøttet Spær.



Spændvidden  $l = 20$  m og Højden  $h = 5$  m, altsaa  $\frac{h}{l} = \frac{1}{4}$ . Afstanden mellem Hovedspærfagene fra Midte til Midte er 5 m, og Taget antages at være Skifertag, saa at den samlede Belastning pr.  $m^2$  af Tagets vandrette Projektion kan regnes til 190 kg, hvortil kommer Spærfagets Egenvægt, der er 10 kg/ $m^2$ . Den hele Belastning paa hvert Hovedspærfag bliver altsaa  $20 \cdot 5 \cdot 200 = 20000$  kg. Naar Spæret tænkes overskaaret i Knuderne, vil der følgelig paa enhver af Knuderne med Undtagelse af de to nederste, som hver belastes af 1250 kg, komme Tryk lodret nedad paa 2500 kg. Enhver af de to Reaktionen bliver i saa Fald 10000 kg. I dette Eksempel vil det vise sig at være nødvendigt tillige et enkelt Sted at benytte Snitmetoden.

Ligevægten mellem de ydre Kræfter er paa Fig. 79<sup>b</sup> angiven ved Polygonen  $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9 P_{10} P_{11}$ .

Begynder man fra venstre Side, vil man efterhaanden paa Fig. 79<sup>b</sup> faa følgende til Knuderne paa Fig. 79<sup>a</sup> svarende Polygone:  $P_{11} P_1 ab$ ;  $a P_2 dc$ ;  $b c e f$ . Da der saavel i den Polygon, som angiver Ligevægten mellem  $f$ ,  $g$ ,  $k$  og  $l$ , som i den, der svarer til den Knude, hvor  $P_3$  angriber, vil være tre ubekendte, kan man ikke konstruere nogen af de til disse Knuder svarende Kraftpolygone. For at komme videre i Diagrammet, maa man da først ved Snitmetoden finde en af de ubekendte Spændinger, i hvilket Øjemed Snittet  $I II$  er lagt gennem  $l$ ,  $o$  og  $n$ . Tages Punktet  $B$  til Momentpunkt, idet den til højre for Snittet liggende Del af Spærfaget tænkes borte, bliver Momentligningen  $8750 \cdot 10 - 2500 \cdot 7,5 - 2500 \cdot 5 - 2500 \cdot 2,5 - l \cdot 4,5 = 0$ , hvoraf  $l = \frac{87500 - 2500 \cdot 15}{4,5} = 11111$  kg.

Denne Værdi for  $l$  afsættes paa Fig. 79<sup>b</sup> som indgaaende i Polygonen  $f g k l$ , og nu kunne de øvrige Polygone

efterhaanden tegnes. De blive:  $g e d P_3 i h$ ;  $i P_4 n m$ ;  $k h m o$ ;  $o n P_5 q p$ ;  $q P_6 s r$ ;  $p r t u$ ;  $l u v x$ ;  $v t s P_7 z y$ ;  $x y a \theta$ ; Kontrollinien bliver  $w$ ; endelig  $a z P_8 w$  og  $P_9 P_{10} \theta w$ . Selve Spærene og de seks paa dem lodrette Ledstykker (Støtterne) blive sammentrykkede, de øvrige Ledstykker strækkes.

Ekspl. 57. Paa Fig. 80<sup>a</sup> er der vist et engelsk Spærfag med tostøttet Spær.

Medens man i de foregaaende Eksempler har set bort fra Vindtrykkets vandrette Komposant, og altsaa kun har taget Hensyn til den lodrette, idet denne indgaar under de paa Tabel XI. B. angivne Belastninger, er hele Vindtrykket taget med i Beregning i det foreliggende Eksempel. Vinden antages at virke skraat nedad fra venstre Side under en Vinkel af  $10^0$  med den vandrette Linie. Vindtrykkets Størrelse bestemmes derved, at man projicerer den Del af Tagfladen, som bæres af Spæret  $AD$ , ind paa et Plan, der er vinkelret paa Vindretningen  $V$ , og derpaa multiplicerer Tagfladens Projektion (paa Fig. 80<sup>a</sup> angiven ved  $AH$ ) med Vindtrykket pr. Arealenhet. Dette Vindtryk, der vil fordele sig paa Knuderne  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  med  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  og  $\frac{1}{6}$ , vil imidlertid ikke virke paa det leddede System med dets fulde Kraft. Opløser man nemlig  $V$  i to Komposanter, hvoraf den ene følger langs med Spæret, medens den anden staar vinkelret paa det, vil, forsaavidt Tagfladen er glat, den Del af Vindtrykket, som følger Spæret, glide af uden at kunne udøve noget Tryk paa Spærfaget, hvorfor man i saa Fald kun har at tage Hensyn til Komposanten vinkelret paa Spæret. Kan Tagfladen ikke betragtes som glat, bør man regne med hele Vindtrykket. Vindtrykkets Opløsning efter de 2 omtalte Retninger er paa Fig. 80<sup>a</sup> foretaget i Midtpunktet af  $AD$ , hvor Resultanten af Vindtrykket vil angribe. Den paa Spæret vinkelrette Komposant

er betegnet med  $Q$ , og den er derefter fordelt paa de fire Knuder, som foran angivet. Komposanterne ere betegnede ved  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  og  $4'$ . Mod disse fire Kræfter eller, hvad der bliver det samme, mod deres Resultant  $Q$  maa Understøtningerne yde Modstande. Spærfaget paa Fig. 80<sup>a</sup> er vist befæstet ved  $A$ , medens det ved  $G$  hviler paa et System af Ruller, hvorved Spærfaget kan forlænges og forkortes, uden at dette vil gaa ud over Murene, der i modsat Fald vilde udsættes for stærke Sidetryk. Paa Grund af denne Maade at befæste Spæret paa, vil Understøtningen ved  $G$  imidlertid kun kunne yde Modstand lodret opad, medens Understøtningen ved  $A$  maa optage det fra Vindtrykket hidrørende Sidetryk. Retningen for Reaktionen i  $A$  maa altsaa findes ved at forlænge  $Q$  til Skæring med den lodrette Linie gennem  $G$  og ved fra dette Skæringspunkt at tegne en ret Linie gennem  $A$ , som vil blive den Linie, hvorefter Reaktionen i  $A$  vil virke. Dette Skæringspunkt vil imidlertid altid falde langt borte, og Tegnepapiret maatte saaledes være meget stort, hvis det var nødvendigt at finde dette Skæringspunkt. Det gælder dog kun om foruden  $A$  at kende et Punkt til af Reaktionen derigennem, da dens Retning saa er bestemt. Et saadant kan findes, som vist paa Fig. 80<sup>a</sup>, ved igennem  $K$ , der ligger paa  $AD$  i Afstanden  $AK = \frac{1}{3} AJ$ , at tegne en Linie parallel med  $Q$  og derefter gennem det Punkt af Linien  $AG$ , der ligger i Afstanden  $\frac{1}{3} AG$  fra  $A$ , at tegne en Linie parallel med Reaktionen gennem  $G$ , altsaa lodret. Disse to Linier ville da skære hinanden i et Punkt af den søgte Reaktion gennem  $A$ . Beviset for Rigtigheden af denne Konstruktion føres let ved Hjælp af ligedannede Trekanter.  $LA$ ,  $KL$  og  $LC$  angive saaledes Retningerne for henholdsvis Reaktionen gennem  $A$ , Vindtrykket  $Q$  og Reaktionen gennem  $G$ . Fra  $L$  har man i Forlængelsen af  $KL$  afsat  $Q$ , som med Kræfterne efter

Linierne  $LC$  og  $LA$  danne en Trekant, der angiver Ligevægten mellem disse tre Kræfter. Reaktionen i  $G$  er betegnet ved  $9$  og Reaktionen i  $A$  ved  $10$ .

Tagets Egenvægt samt Snetrykket, som er tænkt jævnt fordelt over Tagfladen, ere fordelte paa sædvanlig Maade over Spærenes Knuder, og de Paavirkninger, som herefter komme i disse, ere betegnede ved  $1$ .  $2$ .  $3$ .  $4$ .  $5$ .  $6$ . og  $7$ , medens Reaktionen i  $G$  og  $A$  kaldes  $8$  og  $11$ .

Paa Fig. 80<sup>b</sup> er først tegnet Kraftpolygonen  $1' . 1 . 2' . 2 . 3' . 3 . 4' . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11$ , hvorefter de til de forskellige Knuder svarende Kraftpolygoner ere tegnede i følgende Orden:  $10 . 11 . 1' . 1 . 12 . 13$ ;  $12 . 2' . 2 . 15 . 14$ ;  $13 . 14 . 16 . 17$ ;  $16 . 15 . 3' . 3 . 19 . 18$ ;  $17 . 18 . 20 . 21$ ;  $20 . 19 . 4' . 4 . 23 . 22$ ;  $21 . 22 . 24 . 25$ ;  $24 . 23 . 5 . 27 . 26$ ;  $25 . 26 . 28 . 30$ ;  $29$  bliver Kontrollinien. Spærdelene og Støtterne sammentrykkes, medens alle de øvrige Ledstykker strækkes.

Naar Vinden kommer fra den anden Side, bliver Diagrammet en Del forskelligt fra det paa Fig. 80<sup>b</sup> viste, saaledes som det ses af:

Ekspl. 58. (Fig. 81). Her tænkes Vinden blæsende fra højre Side, men Opgaven er iøvrigt forskellig fra den foregaaende derved, at der tænkes liggende Snevægt paa den venstre Halvdel af Spærfaget (Læsiden), medens der paa den højre Halvdel kun virker Egenvægt. Vindtrykkets Komposant vinkelret paa Spæret  $DG$  er her ligeledes betegnet ved  $Q$  og af samme Størrelse som i Ekspl. 57; det fordeler sig paa Knuderne paa samme Maade som der, og de Tryk i disse, som hidrøre fra Vinden, ere betegnede ved  $4'$ ,  $5'$ ,  $6'$  og  $7'$ . Da Spærfaget kun er befæstet i  $A$ , maa Reaktionen gennem  $G$  være lodret. Den Linie, hvori Reaktionen gennem  $A$  vil virke, maa altsaa findes ved at forbinde  $A$  med Skæringspunktet mellem  $Q$  og den lodrette Linie gennem  $G$ . Da dette Skæringspunkt falder uden-

for Papiret, maa man som i forrige Eksempel finde et andet Punkt af Reaktionen gennem  $A$ . Forlænges  $Q$  til Skæring med  $AG$  i Punktet  $K$ , og trækkes en Linie parallel med  $Q$  gennem  $L$ , der er Midtpunktet af  $AK$ , vil denne Linie ved Skæring med den lodrette Linie gennem Midtpunktet af  $AG$  give et Punkt  $M$  af den søgte Reaktion.  $A$  forbindes med  $M$ , og den Trekant, som angiver Ligevægten mellem  $Q$  og de to Reaktionen 9 og 10, tegnes. I Eksempel 57 bleve Reaktionen 8 og 11 ligestore, fordi Belastningen (Egenvægt og Snevægt) var jævnt fordelt over Spærene. Da Snetrykket kun virker paa  $AD$ , men ikke paa  $DG$ , ville Reaktionen i  $A$  og  $G$  blive ulige store, hvorfor de maa bestemmes ved en særlig Konstruktion. De ere fundne ved en Kraftpolygon med Pol  $p$  (Fig. 81<sup>a</sup>) og den dertil svarende Stangpolygon  $I II III IV V VI VII$ . Paa Fig. 81<sup>b</sup> er Diagrammet tegnet paa sædvanlig Maade, efter at først Kraftpolygonen  $7'.7'.6'.6'.5'.5'.4'.4'.3'.2'.1'.11'.10'.9'.8'$  er konstrueret. Man vil se, at de forskellige Ledstykker her blive paavirkede af andre Kræfter end de paa Fig. 80<sup>b</sup> fundne, idet nogle af Paavirkningerne blive større, men de fleste mindre end de i Ekspl. 57 fundne, hvor Vindtrykket kom fra den anden Side, og Snetrykket var jævnt fordelt over hele Spærfaget.

Ekspl. 59. Fig. 82<sup>a</sup> viser en Væggekran, som er ophængt paa en Mur ved  $A$  og  $B$ , medens der i  $C$  virker en Kraft  $P$  lodret nedad. Efter at  $a$  og  $b$  ere fundne ved den til Knuden  $C$  svarende Polygon  $P.b.a$ , findes  $d$  og  $c$  ved Polygonen  $a.d.c$ , samt  $e$  og  $f$  ved Polygonen  $b.e.f$ . Nu viser det sig imidlertid paa Diagrammet, at  $e$  og  $d$ , som skulle indgaa i een Polygon, ikke støde sammen; man maa da, hvis man vil have et sammenhængende Diagram, fra det af  $e$ 's Endepunkter, hvor  $f$  støder til  $e$ , tegne en Linie ligestor og parallel med  $d$ ,

hvorefter Polygonen  $d.e.k.i$  kan dannes. Paa lignende Maade maa Spændingerne i de øvrige Diagonaler indføres een Gang til i Diagrammet. Hvor de oprindeligt ere fundne, ere de tegnede med fulde Linier, hvor de ere gentagne, derimod med punkterede Linier.

$a, c, f, g, i, l, n, p$  og  $r$  sammentrykkes, medens de øvrige strækkes.  $s$  og  $q$  maa holde Ligevægt med Reaktionen  $R$ , som man faar paa Fig. 82<sup>b</sup> ved at forbinde  $s$ 's og den punkterede  $q$ 's Endepunkter. Paa samme Maade maa  $Q$ ,  $p$  og  $r$  danne en Trekant, som angiver Ligevægten mellem disse tre Kræfter. En Prøve paa Tegningens Rigtighed faar man derved, at  $R$  og  $Q$  samt de punkterede  $r$  og  $q$  paa Fig. 82<sup>b</sup> skulle skære hverandre i eet Punkt.

Paa Figurerne 83, 84 og 85 er der vist nogle forskellige Gitterdragere, der som omtalt finde Anvendelse ved Broer. I Figurerne 83 og 84 ere Hoved og Fod parallele, medens derimod Hovedet i Fig. 85 tænkes formet efter en Cirkelbue eller en Parabel. I Knudepunkterne i Dragerens Fod forudsættes der befæstet Tværdragere. Paa Tværdragerne anbringes der Længdedragere og paa disse Brodækket. Belastningen har man i alle tre Eksempler tænkt jævnt fordelt over hele Broens Længde. Der vil saaledes komme til at virke ligestore Kræfter i alle Knudepunkterne i Foden med Undtagelse af de to ved Enderne, hvor der kun vil virke halvt saa store Kræfter lodret nedad som i de øvrige Knuder.

Ekspl. 60. I den paa Fig. 83 viste Gitterdrager ere de lodret nedad virkende Kræfter betegnede ved 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. Reaktionen 10 og 11 blive ligestore og hver af dem lig med Halvdelen af Summen af de givne ydre Kræfter. Efter at Kraftpolygonen 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11 er tegnet, ere de til de forskellige Knuder svarende Polygoner

konstruerede i følgende Orden: 11. 1. 12; 12. 14. 15; Modstanden i 13 bliver altsaa Nul; 14. 2. 17. 16; 15. 16. 18. 19; 18. 17. 3. 21. 20; 19. 20. 22. 23; 22. 21. 4. 25. 24; 23. 24. 26. 27; 26. 25. 5. 29. 30; Modstanden i 28 bliver altsaa Nul; 31 bliver ligesaa stor som 27; 31. 30. 32. 35; 32. 29. 6. 33. 34; 35. 34. 36. 39; 36. 33. 7. 37. 38; 39. 38. 40. 43; 40. 37. 8. 42; 42 bliver Kontrollinien. Spændingen i 44 bliver Differensen mellem Paavirkningerne 10 og 9, og Spændingen i 41 bliver Nul. 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 31, 32, 35, 36, 39, 40, 43 og 44 trykkes, alle de øvrige Stykker strækkes.

Eksp. 61. Gitterdrageren paa Fig. 84 indeholder ingen lodrette Stykker, idet Hoved og Fod ere forbundne udelukkende ved skraa Stykker, som hælde  $60^{\circ}$  mod den vandrette Linie. Af de i Fodens Knudepunkter angribende Kræfter og Reaktionen i Understøtningpunkterne har man først dannet Kraftpolygonen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, og derefter ere de til Knuderne svarende Polygoner tegnede i følgende Orden: 9. 1. 10. 13; Spændingerne i 11 og 12 blive altsaa Nul; 13. 14. 15; 14. 10. 2. 17. 16; 15. 16. 18. 19; 18. 17. 3. 21. 20; 19. 20. 22. 23; 22. 21. 4. 25. 24; 23. 24. 26. 27; 26. 25. 5. 29. 28; 27. 28. 30. 31; 30. 29. 6. 33. 32; 34 bliver Kontrollinien; i 35 og 36 blive Spændingerne Nul. Af Fig. 84<sup>a</sup> og <sup>b</sup> fremgaar det tydeligt, hvilke af Stykkerne der strækkes, og hvilke der sammentrykkes.

Eksp. 62. Bestemmelsen af Diagrammet for den paa Fig. 85 viste Gitterdrager sker aldeles paa samme Maade som i de foregaaende Eksempler, hvorfor den ikke skal omtales nærmere. Man ser af Figuren, at Spændingerne i Diagonalerne, for saa vidt de ikke blive Nul, i ethvert Tilfælde blive meget smaa, naar Belastningen tænkes jævnt fordelt over hele Broens Længde. Havde Hovedet været

formet efter en Parabel, vare Spændingerne blevne Nul i alle Diagonaler.

Ved alle disse Brokonstruktioner vil det vise sig, at Spændingerne i Dragerens Hoved og Fod faa deres største Værdier, naar Belastningen er jævnt fordelt over hele Længden. Derimod ville de øvrige Stykker, de saakaldte Fyldingsdele, blive stærkest paavirkede, naar Belastningen skrider frem fra Broens ene Ende hen imod den anden. Diagonalerne ville derved blive paavirkede enten til Strækning eller Sammentrykning, eftersom Belastningen skrider frem fra den ene eller den anden Ende af Broen. Ønsker man i de paa Fig. 83 og 85 viste Dragere, at Diagonalerne kun skulle modstaa strækkende Kræfter, maa man i alle eller en Del af Fagene tillige anbringe Diagonaler, som krydse de paa Figuren viste, saa at der altid kan være een Diagonal til Stede til at modstaa de strækkende Kræfter, idet de Diagonaler, som blive trykkede, straks ville give efter under den sammentrykkende Paavirkning, naar de dannes af tyndt Stangjærn. For at Behandlingen af saadanne Brodragere kan være fyldestgørende, bør man, foruden Diagrammet for den jævnt fordelte Belastning, tillige bestemme et nyt Diagram, for hver Gang Belastningen er skreden frem indtil midt imellem to efter hinanden følgende lodrette Stivere.

## II. Styrkelæren.

De Konstruktioner, som ere omtalte i Ligevægtslæren, bestaa af et eller flere prismatiske Legemer eller af Legemer, som tilnærmelsesvis kunne betragtes som pris-

matiske. Et saadant Legeme er sammensat af en stor Mængde meget smaa Dele, de saakaldte Partikler, som ved en indbyrdes Sammenhængskraft holdes i en saadan Forbindelse med hverandre, at de danne det faste Legeme. Disse Partikler kunne dog bevæges noget i Forhold til hverandre, idet de under ydre Kræfters Paavirkning kunne fjernes fra hverandre eller nærmes til hverandre; men disse Bevægelser maa holdes indenfor temmelig snævre Grænser i de Materialer, som her skulle omtales, hvis ikke Sammenhængskraften og dermed Legemets Modstandsevne i væsentlig Grad skal forringes. Indenfor visse Grænser vil denne Sammenhængskraft gøre desto større Modstand mod Partiklernes Bevægelse, jo mere disse nærme sig til hverandre eller fjerne sig fra hverandre. Disse saakaldte indre Modstande i Materialet ville vokse, indtil Modstandene og de ydre Paavirkninger holde hverandre i Ligevægt. Saalænge den ved Partiklernes Bevægelse indtraadte Forandring i Legemets Form kun er ringe, ville Partiklerne, saasomt den ydre Paavirkning ophører, atter vende tilbage til deres tidligere Plads, og Legemet altsaa igen antage den oprindelige Form. Saalænge dette finder Sted, siges Legemerne at være elastiske. En saadan Elasticitet besidde de forskellige Legemer imidlertid i meget forskellig Grad. Saalænge et Legeme forholder sig elastisk, siges Paavirkningerne at holde sig indenfor vedkommende Materiales Elasticitetsgrænse. Denne afhænger foruden af Materialets Art og Beskaffenhed til lige af Paavirkningens Art. Ved Forsøg er det godtgjort, at man indenfor en vis Grænse, kaldet Proportionalitetsgrænsen, kan betragte Formforandringen som proportional med Paavirkningen (Hookes Lov). Dette gælder dog kun for smedeligt Jærn, men i Praksis regner man Hookes Lov gældende ogsaa for andre Materialer. Overskrides Proportionalitetsgrænsen, vil denne

Proportionalitet ophøre, idet Formforandringerne ville tiltage stærkere end Paavirkningerne. Proportionalitetsgrænsen og Elasticitetsgrænsen er to forskellige Størrelser, som dog, ved de gængse Bygningsmaterialer, praktisk talt falde sammen. Forøges Paavirkningerne yderligere, ville de til sidst blive saa store, at Sammenhængskraften mellem Partiklerne ophæves, og der indtræder da et Brud i Legemet. I Konstruktioner maa selvfølgelig intet Materiale belastes udover Elasticitetsgrænsen.

De forskellige Slags Paavirkninger, som et prismatisk Legeme kan blive Genstand for, ere følgende:

1) Virker der i Legemets Akse to ligestore Kræfter bort fra hinanden, ville de søge at fjerne hvilkensomhelst to Nabotværsnit fra hinanden i Legemets Længderetning. Man siger da, at Legemet paavirkes til Strækning.

2) Virke saadanne to ligestore Kræfter i Aksen ind imod hinanden, ville de søge at nærme Nabotværsnit til hinanden. Legemet siges da at paavirkes til Sammentrykning. Man forudsætter i dette Tilfælde, at Legemet under Paavirkningen ikke antager nogen krum Form.

3) Virker der paa Legemet tæt opad hinanden to ligestore og parallelle Kræfter, men i modsatte Retninger, ville de søge at forskyde de to Tværsnit, som de virke paa, i Forhold til hinanden. Legemet paavirkes i saa Fald til Forskydning eller Overklipping.

4) Virker der paa Legemet et Kraftpar, saaledes at Legemets Akse ligger i Kraftparrets Plan, vil Legemet under Paavirkningen antage en krum Form. Legemet paavirkes til Bøjning.

5) Paavirkes Legemet af et Kraftpar, hvis Plan staar vinkelret paa Legemets Akse, paavirkes det til Vridning.

Alle de Paavirkninger, som Legemer maatte blive ud-

satte for, og som ikke direkte henhøre til en af de nævnte, ville kunne erstattes ved to eller flere af dem.

Idet disse Paavirkninger hver for sig skulle blive gjort til Genstand for Omtale i Styrkelæren, vil denne tillige komme til at omhandle, hvorledes man er i Stand til at finde:

a) den Belastning, som man tør byde en Konstruktionsdel af bekendt Længde, Tværnit og Materiale.

b) hvilke Tværsnitsdimensioner man bør give en Konstruktionsdel, naar dens Længde og Paavirkningerne paa den ere bekendte.

c) den Formforandring, som givne Paavirkninger frembringe i en Konstruktionsdel af bekendte Dimensioner og Materiale.

### 1. Strækning.

Naar der i et prismatisk Legemes Akse med dennes Endepunkter som Angrebepunkter virke to ligestore Kræfter bort fra hinanden, vil Legemet strækkes, idet Kræfterne, hvis Virkning forplanter sig gennem hele dets Længde, ville søge at fjerne hvilkensomhelst to paa hinanden følgende Tværnit fra hinanden efter Legemets Længderetning. Den ene af de to Kræfter erstattes ofte af en ydre Modstand (Befæstelsen).

Fig. 86 viser et prismatisk Legeme  $MN$ , som i lodret Stilling er befæstet ved  $M$ , medens der ved  $N$  hænger en Vægt  $P$ . For at Legemet ikke skal falde, maa Befæstelsen ved  $M$  yde en Modstand lodret opad af Størrelse  $P$ . Legemets Tværsnitsareal betegnes ved  $A$ , dets Længde ved  $L$  og det Stykke, som Legemet under  $P$ 's Virkning er blevet forlænget, ved  $e$ . Da Kraften  $P$  kan antages at fordele sig jævnt over Tværsnitsarealet, vil der paa hver

Arealenhed komme til at virke en Kraft  $\frac{P}{A}$ , og Legemet vil for hver Længdeenhed forlænges et Stykke  $\frac{e}{L}$ .

Denne Forlængelse kan betragtes som Udtryk for hele Formforandringen, idet den Formindskelse, som Tværsnitsdimensionerne samtidig lide, er meget ringe i Sammenligning med Legemets Forlængelse. Da Høokes Lov antages gældende, vil Forholdet mellem Formforandringen og Paavirkningen være en for hvert enkelt Materiale bestemt (konstant) Størrelse. Betegnes denne Konstant ved  $E$ , har man altsaa

$$\frac{P}{A} : \frac{e}{L} = E, \text{ hvoraf } P = AE \frac{e}{L}. \quad (13)$$

Antog man, at Stangens Tværsnitsareal var 1 Kvadratenhed, samt at  $P$  var saa stor, at Legemet forlængedes et ligesaa stort Stykke som dets oprindelige Længde, hvorved altsaa  $e = L$ , vilde man af Ligning (13) faa  $P = E$ .  $E$ , der kaldes Elasticitetskoefficienten, er altsaa den Paavirkning pr. Arealenhed, ved hvilken Prismets Længde vilde fordobles. Denne Betragtning er dog ganske teoretisk, da der ikke kan være Tale om at belaste de Materialer, som anvendes i Bygnings- og Maskinkonstruktioner saa stærkt, at deres Længde fordobles, idet der, længe førend en saadan Belastning naas, vil indtræde Brud i Legemet, og forinden Bruddet indtraadte, var allerede Proportionalitetsgrænsen overskreden, men udover den gælder Ligning (13) ikke.

Elasticitetskoefficienten har, som nævnt, for samme Materiale altid den samme Værdi udtrykt i  $\text{kg/mm}^2$ . Derimod er Elasticitetskoefficienten forskellig for de forskellige Materialer. Af Ligning (13) kan man finde enhver af de 5 Størrelser, naar de 4 andre ere bekendte, og den kan saaledes benyttes dels til ved Forsøg at bestemme

Elasticitetskoefficienten, naar Legemets Længde og dets Tværnsnitsareal samt den virkende Kraft ere bekendte, og naar den Forlængelse, som Kraften fremkalder, maales, dels til, naar Elasticitetskoefficienten er bekendt, at finde, hvormeget et Legeme af givne Dimensioner vil forlænges under en given strækkende Kraft  $P$ 's Virkning.

Ekspl. 63. En prismatisk Stang af Smedejærn med et Tværnsnitsareal af  $100 \text{ mm}^2$  og af Længde  $500 \text{ mm}$  var fastgjort ved den ene Ende, medens der i den anden Ende var ophængt  $1000 \text{ kg}$ . Paa Grund af denne Vægt forlængedes Stangen  $0,25 \text{ mm}$ .

Man skal bestemme Elasticitetskoefficienten.

Løser man (13) med Hensyn til  $E$  og indsætter Værdierne for  $P$ ,  $A$ ,  $L$  og  $e$  i den, faar man

$$E = \frac{PL}{Ae} = \frac{1000 \cdot 500}{100 \cdot 0,25} = 20000 \text{ kg}.$$

Elasticitetskoefficienten for Smedejærn er altsaa  $20000 \text{ kg/mm}^2$ .

Ekspl. 64. En prismatisk Stang af Træ med et Tværnsnitsareal af  $200 \text{ mm}^2$  og en Længde af  $5 \text{ m}$  blev, ved at strækkes af  $48 \text{ kg}$ , forlænget  $1 \text{ mm}$ . Bestem Elasticitetskoefficienten.

$$E = \frac{48 \cdot 5000}{200 \cdot 1} = 1200 \text{ kg/mm}^2.$$

Løses Ligning (13) med Hensyn til  $e$ , faar man  $e = \frac{PL}{AE}$ . Herved kan man finde en Stangs Forlængelse, naar dens Tværnsnitsareal og Længde samt Belastningens Størrelse og Materialets Elasticitetskoefficient ere bekendte.

Paa Tabel II. ere Værdierne for en Del Materialers Elasticitetskoefficienter angivne.

Den største Værdi, som  $\frac{Ee}{L}$ , der betegner en Paavirkning pr. Arealenhed, kan antage indenfor Proportionalitetsgrænsen, kaldes Legemets Bæreevne. I Konstruktioner tør man dog ikke benytte en saa høj Værdi, men man maa nøjes med en Brøkdel ( $\frac{1}{2}$  à  $\frac{1}{4}$ ) deraf. Denne Værdi af  $\frac{Ee}{L}$  angiver den tilladelige Paavirkning for Strækning pr. Kvadratenhed af Tværnsnitsarealet. Den betegnes ved  $k_s$  og udtrykkes i  $\text{kg/mm}^2$ .

De Værdier, som man tør benytte for  $k_s$ , afhænge foruden af Materialets Art og Beskaffenhed tillige af den Anvendelse, der gøres af vedkommende Konstruktionsdel. Der maa saaledes benyttes en mindre Værdi for  $k_s$ , naar Konstruktionen er udsat for Rystelser eller, naar den snart paavirkes af den fulde Kraft snart slet ikke, medens der kan bruges en større Værdi for  $k_s$ , naar Konstruktionen er fuldstændig rolig, og naar den uafbrudt paavirkes af samme Kraft.

Paa Tabellerne III. og IV. findes der anført forskellige Værdier af  $k_s$  for en Del Materialers Vedkommende.

Ved i Ligning (13) at erstatte  $\frac{Ee}{L}$  med  $k_s$ , faar man en dermed analog Ligning, nemlig

$$P = A \cdot k_s, \quad (14)$$

der bruges enten til at bestemme, hvor stort et Tværnsnitsareal man skal give en Stang, som paavirkes til Strækning af en bekendt Kraft  $P$ , eller til at finde den Kraft, hvormed man uden Fare tør strække en Stang af givet Tværnsnitsareal, eller endelig til at finde Paavirkningen pr. Arealenhed, naar Kraften og Arealet ere bekendte.

Den Værdi af  $\frac{Ee}{L}$ , hvorved Brud vil indtræde i et Legeme, kaldes vedkommende Materiales Brudgrænse.

Den betegnes ved  $K_s$ , og Værdier for den ere angivne paa Tabel II. Erstattes  $\frac{Ee}{L}$  i Ligning (13) med  $K_s$ , faar man

$$P = A \cdot K_s, \quad (15)$$

der benyttes til Bestemmelse af den Kraft, som vil sønderrive en Stang af givet Tværnsitsareal.

Ekspl. 65. En Smedejærns Stang af kvadratisk Tværnsnit med Side 30 mm er i lodret Stilling befæstet foroven. Hvor stor en Vægt vil det være nødvendigt at ophænge i Stangens nederste Ende, for at Stangen skal blive sønderreven?  $K_s = 38 \text{ kg/mm}^2$ .

$$P = 30^2 \cdot 38 = 34200 \text{ kg.}$$

Ekspl. 66. En prismatisk Stang af Smedejærn med kvadratisk Tværnsnit af Side 27 mm er befæstet i den øverste Ende. Hvor stor en Vægt tør man med Sikkerhed ophænge i den anden Ende, naar  $k_s$  regnes til  $7,5 \text{ kg/mm}^2$ ?

$$P = 27 \cdot 27 \cdot 7,5 = 5468 \text{ kg.}$$

Ekspl. 67. Hvor stor Belastning tør man ophænge i denne Stangs nederste Ende, naar Stangen er 12 m lang, og der tages Hensyn til Stangens Egenvægt? Smedejærn vejer  $7800 \text{ kg/m}^3$ . Kaldes den søgte Belastning  $P$ , har man

$$P + \frac{27^2 \cdot 12 \cdot 7800}{1000^2} = 27^2 \cdot 7,5, \text{ hvoraf}$$

$$P = 27^2 \left( 7,5 - \frac{12 \cdot 7800}{1000^2} \right) = \text{ca. } 5400 \text{ kg.}$$

Ekspl. 68. En Hængesøjle bestaar af to Tænger. Disse have samme Tværnsnit, nemlig rektangulært med Sider 110 mm og 260 mm, og de tænkes befæstede ved en

26 mm tyk Bolt. Hvor stor Paavirkning tør man byde Hængesøjlen til Strækning, naar  $k_s = 0,7 \text{ kg/mm}^2$ ?

Tværnsitsarealet vil paa det svageste Sted være

$$2 \cdot 110 (260 - 26) = 51480 \text{ mm}^2.$$

$$P = 51480 \cdot 0,7 = \text{ca. } 36000 \text{ kg.}$$

Ekspl. 69. Skal en saadan Hængesøjle bære 50000 kg, og Tværnsnittenes ene Side gøres 140 mm, hvor stor bliver da Rektanglernes anden Side, naar  $k_s$  har samme Værdi som i forrige Eksempel?

$$50000 = 2 \cdot 140 \cdot x \cdot 0,7; \quad x = 256 \text{ mm,}$$

hvertil man desuden maa lægge Befæstelsboltens Diameter, for at faa den søgte Dimension paa det Sted, hvor Tangen ikke er gennembrudt. Hver af Tængerne faar altsaa et rektangulært Tværnsnit med Sider 140 mm og 282 mm.

Ekspl. 70. Stemplet i en hydraulisk Presse har en Diameter af 500 mm, medens det største Vandtryk er 200 Atmosfærer. Pressen har fire Søjler af Smedejærn med cirkulært Tværnsnit. Find Diametren af disse, naar  $k_s = 6 \text{ kg/mm}^2$ . En Atmosfæres Tryk regnes til  $0,01 \text{ kg/mm}^2$ .

$$\text{Trækket i de fire Søjler bliver } 200 \cdot 0,01 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 500^2.$$

Diametren af en af Søjlerne findes af Ligningen

$$\frac{1}{4} \cdot 200 \cdot 0,01 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 500^2 = 6 \cdot \frac{\pi}{4} d^2, \text{ hvoraf}$$

$$d = 144,3 \text{ mm.}$$

Ekspl. 71. En Hængesøjle af Fyrretræ har kvadratisk Tværnsnit med Side 150 mm. Paa det svageste Sted har den det paa Fig. 87 skraverede Tværnsitsareal. Hvor stor Paavirkning tør man byde Søjlen, naar  $k_s = 0,9 \text{ kg/mm}^2$ ?

$$P = 20 \cdot 25^2 \cdot 0,9 = 11250 \text{ kg.}$$



Ekspl. 72. En Stang af Smedejærn, der er 20 Meter lang og har kvadratisk Tværnsnit, er i lodret Stilling fastgjort foroven og bærer i den nederste Ende 30000 kg. Find Kvadratsiden, naar Hensyn tages til Stangens Egenvægt. Smedejærn vejer  $7800 \text{ kg/m}^3$  og  $k_s = 6 \text{ kg/mm}^2$ .

$$x^2 \cdot \frac{20 \cdot 7800}{1000^2} + 30000 = x^2 \cdot 6;$$

$$x = 71,65 \text{ mm} = \text{ca. } 72 \text{ mm.}$$

Ekspl. 73. Den i Ekspl. 72 nævnte 20 m lange Stang tænkes erstattet ved ti indbyrdes forbundne 2 m lange Stænger. Hvilke Tværnsnitsdimensioner maa man i saa Fald give disse Stænger, og hvor stor Besparelse i Materiale vilde man opnaa ved at benytte de ti Stænger i Stedet for den ene Stang?

## 2. Sammentrykning.

Virker der i et prismatisk Legemes Akse to ligestore Kræfter ind imod hinanden, idet deres Angrebepunkter ligge i Aksens Endepunkter, siger man, at Legemet paa-virktes til Sammentrykning af de to Kræfter. Disse, hvis Virkning forplanter sig gennem hele Legemets Længde, ville nemlig nærme hvilket som helst to paa hinanden følgende Tværnsnit ind imod hinanden. Ogsaa her vil, ligesom ved Strækning, den ene Kraft kunne erstattes ved en ydre Modstand. Hviler et Legeme, som det paa Fig. 88 viste, paa et Plan  $BC$ , medens Legemet ved  $M$ , som er det øverste Endepunkt af dets Akse, paavirkes af en ydre Kraft  $P$ , maa Planet  $BC$  yde en Modstand lodret opad af Størrelse  $P$ , da der ellers vilde finde en Bevægelse Sted lodret nedad. Under de ydre Kræfters Virkning vil Legemet, hvis Længde kaldes  $L$ , og hvis Tværnsnitsareal

betegnes ved  $A$ , forkortes et Stykke  $e$ . Paa Grund af Proportionaliteten mellem Paavirkningen og Formforandringen vil man ogsaa her faa Forholdet mellem  $\frac{P}{A}$ , Paavirkningen pr. Arealenhed, og  $\frac{e}{L}$ , Forkortelsen pr. Længdeenhed, lig med en Konstant, og denne har ved Forsøg vist sig for de enkelte Materialers Vedkommende at have omtrent samme Værdi som den under Strækning omtalte Konstant  $E$ , Elasticitetskoefficienten for Strækning. Man kan altsaa ogsaa her sætte

$$\frac{P}{A} : \frac{e}{L} = E,$$

men  $E$  betegner nu Elasticitetskoefficienten for Sammentrykning. Ved at løse Ligningen med Hensyn til  $P$ , faar man

$$P = AE \frac{e}{L}, \quad (16)$$

der er ganske analog med Ligning (13) og ligesom denne kan bruges til at bestemme en af de 5 Størrelser, naar de andre ere bekendte.

Ved Bæreevnen forstaar man ogsaa her den største Værdi, som  $\frac{Ee}{L}$  kan antage indenfor Proportionalitetsgrænsen.

I Konstruktioner, der udsættes for Sammentrykning, benyttes dog ligesom ved Strækning kun en Brøkdel af denne Værdi; den kaldes den tilladelige Paavirkning for Sammentrykning og betegnes ved  $k_t$ . Den udtrykkes i  $\text{kg/mm}^2$ . Værdier af den findes angivne i Tabellerne III. og IV. for forskellige Materialer og under forskellige Belastningsforudsætninger. Erstattes  $\frac{Ee}{L}$  i Ligning (16) med  $k_t$ , faar man

$$P = A \cdot k_t, \quad (17)$$

som benyttes enten til Bestemmelse af den Kraft, hvorved man tør sammentrykke en Konstruktionsdel af prismatisk Form, hvis Tværsnitsdimensioner ere givne, eller til at finde Tværsnitsdimensionerne af et saadant prismatisk Legeme, der udsættes for Sammentrykning af en bekendt Kraft, eller endelig til at finde Paavirkningen pr. Arealenhed, naar Kraften og Arealet ere bekendte.

Erstatter man  $\frac{Ee}{L}$  i Ligning (16) med den Paavirkning  $K_t$ , der svarer til Brud, faar man  $P = A \cdot K_t$  (18)

For  $K_t$ , som kaldes Brudgrænsen, er der anført Værdier i Tabel II. Ligning (18) bruges til Bestemmelse af den Kraft, som vil knuse et Prisme af et bestemt Materiale. Ligningerne (17) og (18) kunne kun anvendes i Tilfælde, hvor man er sikker paa, at der udelukkende finder Sammentrykning Sted, saaledes at Legemet altsaa forkortes uden samtidig at bøjes. Er Legemet langt i Forhold til Tværsnitsdimensionerne, vil der let indtræde en Sidebøjning, og i saa Fald maa der anvendes Formler, i hvilke der tages Hensyn hertil.

Forinden man imidlertid gaar nærmere ind paa saadanne Tilfælde, er der Anledning til at omtale en Størrelse, som forekommer i de Formler, der benyttes, naar Legemet er udsat for at bøjes under Sammentrykningen. Denne Størrelse kaldes Tværsnitsarealets Inertimoment og betegnes ved  $J$ .

Antages et Areal delt i en overordentlig stor Mængde ganske smaa Arealer (Arealelementer), og multipliceres hvert enkelt Arealelement med Kvadratet paa dets Afstand fra en eller anden Linie (Aksen) i Arealets Plan, kaldes Summen af alle de saaledes dannede Produkter Arealets Inertimoment med Hensyn til den valgte Linie som Akse. Til yderligere Forstaaelse heraf skal man an-

give, hvorledes man kan finde Inertimomentet af det paa Fig. 89 viste Rektangel med Hensyn til Linien  $XX$ , der falder sammen med Rektanglets ene Side  $b$ .

Rektanglets anden Side  $a$  tænkes delt i et meget stort Antal ligestore Dele. Antallet af Dele betegnes ved  $n$ . Ved Linier gennem Delingspunkterne parallelle med  $b$  deles Rektanglet i  $n$  ganske smalle Rektangler, hvis enkelte Arealelementer tilnærmelsesvis alle have samme Afstand fra Aksen som vedkommende Delingspunkter. Disse Afstande ville være: For det nærmest Aksen liggende Rektangel  $\frac{1}{n} a$ , for det næste  $\frac{2}{n} a$ , for det følgende

$\frac{3}{n} a$  o. s. v. Rektanglets Inertimoment bliver altsaa

$$J = b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{2a}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{3a}{n}\right)^2 \\ + \dots + b \cdot \frac{a}{n} \cdot \left(\frac{na}{n}\right)^2 \\ = \frac{b a^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Størrelsen indenfor Parentesen er  $\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ , som indsat i ovenstaaende Udtryk giver

$$J = \frac{b a^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = b a^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \\ = b a^3 \cdot \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

$n$  maa nu antages at være uendelig stor, da kun i det Tilfælde de enkelte smalle Rektanglers Arealelementer have samme Afstand fra Aksen som Delingspunkterne.

Herved bliver  $\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$ , hvorved

$$J = b a^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} b a^3, \quad (19)$$

som saaledes er Inertimomentet af et Rektangel med Hensyn til Siden  $b$ , naar den anden Side er  $a$ .

Inertimomentet af det paa Fig. 91 viste Rektangel, der ligeledes har Bredden  $b$ , men hvis Højde  $h$  er lig med  $2a$ , indses let at maatte være dobbelt saa stort som Inertimomentet af det paa Fig. 89 viste med Hensyn til samme

Akse. Altsaa bliver  $J = 2 \cdot \frac{1}{3} ba^3$ , som for  $a = \frac{h}{2}$

bliver til  $J = \frac{1}{12} bh^3$ , (20)

der er Inertimomentet af et Rektangel, hvis Sider ere  $b$  og  $h$ , med Hensyn til en Linie gennem Rektanglets Tyngdepunkt parallel med  $b$ .

I ethvert Areal kan der gennem dets Tyngdepunkt lægges to paa hinanden vinkelrette Linier saaledes, at Arealets Inertimoment med Hensyn til den ene Linie er det største og dets Inertimoment med Hensyn til den anden det mindste af alle Inertimomenter med Hensyn til Linier, som lægges gennem Tyngdepunktet. Disse Linier kaldes Arealets Hovedakser.

Paa Tabellerne V, VI, VII og VIII er der angivet en Del almindelig forekommende Tværsnitsformer samt deres Inertimomenter med Hensyn til nogle Akser gennem Tyngdepunkterne tilligemed Størrelsen af Tværsnittenes Arealer og Afstandene fra Aksen til de yderste Arealelementer. Inertimomenterne af mere udviklede Tværsnitsformer kunne findes enten ad grafisk Vej eller ved Beregning ved Hjælp af de i Tabellerne angivne simple Former. Man vil i saa Fald ofte have Brug for Inertimomenterne med Hensyn til Linier, som ikke gaa gennem vedkommende Areal Tyngdepunkt. Kender man (Fig. 90) en plan Figurs Inertimoment  $J$  med Hensyn til en Akse gennem dens Tyngdepunkt, kan man finde Figurens Inertimoment  $J_1$  med Hensyn til en med denne Akse parallel Linie, der ligger i Afstanden  $m$  fra den, ved Hjælp af Ligningen

$$J_1 = J + Am^2, \quad (21)$$

hvor  $A$  er Figurens Areal.

Arealets Inertimoment med Hensyn til Linien  $X_1 X_1$  vil nemlig, ifølge Definitionen paa et Inertimoment, være

$$J_1 = a_1(m + y_1)^2 + a_2(m + y_2)^2 + a_3(m + y_3)^2 + \dots \\ + a_n(m + y_n)^2 = \Sigma a(m + y)^2,$$

naar  $\Sigma$  (det græske S, der kaldes Sigma) betegner Summen af de enkelte Arealelementers Inertimomenter,  $a$ 'erne Elementernes Arealer og  $y$ 'erne deres Afstande fra Linien  $XX$ .

$$\Sigma a(m + y)^2 = \Sigma am^2 + \Sigma 2amy + \Sigma ay^2 = m^2 \Sigma a + 2m \Sigma ay + \Sigma ay^2.$$

$\Sigma a = A$ ,  $\Sigma ay = 0$ , fordi  $XX$  gaar gennem Arealets Tyngdepunkt, og  $\Sigma ay^2 = J$ ; altsaa er  $J_1 = J + Am^2$ .

Løses Ligning (21) med Hensyn til  $J$ , faar man

$$J = J_1 - Am^2. \quad (22)$$

Ved Hjælp af denne sidste Ligning kunde man ogsaa have fundet Inertimomentet af Rektanglet paa Fig. 91. Ifølge (19) er Rektanglets Inertimoment  $J_1$  med Hensyn til  $ZZ$ :  $J_1 = \frac{1}{3} bh^3$ ; dets Areal  $A = bh$  og  $m = \frac{1}{2} h$ . Indsættes disse Størrelser i (22), faar man

$$J = \frac{1}{3} bh^3 - bh \left(\frac{1}{2} h\right)^2 = \frac{1}{12} bh^3.$$

Til Oplysning om, hvorledes man finder Inertimomenterne af mere udviklede Arealer, skal man vise, hvorledes man ved Hjælp af Rektanglets Inertimoment kan finde Inertimomentet af den paa Fig. 92 viste  $\perp$ -Form med Hensyn til en Akse gennem dens Tyngdepunkt. Tyngdepunktets Beliggenhed antages bestemt paa den i Ligevægtslæren angivne Maade. Inertimomentet af Figuren med Hensyn til Aksen  $XX$  maa være Summen af Inertimomenterne af  $ABCD$  og  $LMGH$  minus Summen af Inertimomenterne af  $DEFM$  og  $CKIL$ , altsaa

$$J = \frac{1}{3} b h^3 + \frac{1}{3} b_1 h_1^3 - \left( \frac{1}{3} \frac{b_2}{2} h_2^3 + \frac{1}{3} \frac{b_2}{2} h_2^3 \right) \\ = \frac{1}{3} (b h^3 + b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3).$$

Som forhen bemærket, vil man ved Bestemmelse af en Søjles Tværnsnitsdimensioner, naar der paa den hviler en bekendt Vægt, eller af den Belastning, som man tør byde en Søjle af bekendte Tværnsnitsdimensioner, komme til at benytte Formler, hvori der forekommer Inertimomenter med Hensyn til Akser gennem vedkommende Tværnsnits Tyngdepunkt, for saa vidt man ved Beregning mener at maatte tage Hensyn til en mulig indtrædende Bøjning. Blandt de Formler, som da anvendes, skal her kun omtales en enkelt, der vil kunne bruges i alle de almindeligst forekommende Tilfælde.

En Søjle vil som oftest kunne betragtes som simpelt understøttet saavel fornedet som foroven, og Kraften, som virker sammentrykkende efter Søjleens Længde, antages at virke efter Linien  $BC$ , Søjleens geometriske Akse (Fig. 93). Under  $P$ 's Virkning vil Søjlen da faa den paa Fig. 94 viste Form. Til Bestemmelse af dens Tværnsnitsdimensioner haves en ved den højere Matematik udviklet Formel,

$$P = \frac{10 EJ}{n L^2}, \quad (23)$$

hvor  $P$  er Paavirkningen,  $E$  Elasticitetskoefficienten,  $J$  Inertimomentet,  $L$  Søjleens Længde og  $n$  en Konstant, som for Smedejærn er 4 à 5, for Støbejærn 6 à 8 og for Træ 10 à 12.

Ved Betragtning af (23) ser man, at  $P$  vokser og aftager med  $J$ . Ved Bestemmelsen af den Belastning, som man tør byde Søjlen, maa man blandt vedkommende Tværnsnits forskellige Inertimomenter med Hensyn til forskellige gennem Tyngdepunktet gaaende Akser, benytte det mindste Inertimoment, og omvendt maa man, naar Trykket

$P$  er bekendt, benytte en Tværnsnitsform, hvis mindste Inertimoment er lig med eller større end den Værdi, som man finder for  $J$  af Ligning (23). Imidlertid kan det hændes, at man ved Benyttelse af (23) faar et Tværnsnit, hvis Areal multipliceret med  $k_t$  giver en Størrelse, der er mindre end  $P$ , medens man, hvis Arealet var tilstrækkelig stort til at modstaa den direkte Sammentrykning, maatte faa  $Ak_t > P$ . Tværnsnitsarealet er i saa Fald for lille. Man maa da lægge Ligning (17) til Grund for Bestemmelsen af Arealet. Det vil derfor være rigtigst i hvert enkelt Tilfælde at undersøge Søjlen for begge Formlers Vedkommende samt vælge et Tværnsnit, som gør højre Side saavel i Ligning (17) som i Ligning (23) større end venstre Side, eller i hvert Fald lig dermed.

Eksp. 74. En 3 m høj Søjle af Fyrretræ med kvadratisk Tværnsnit skal med Sikkerhed kunne bære 20000 kg. Find Kvadratsiden, naar  $k_t = 0,63$  kg/mm<sup>2</sup> og  $E = 950$  kg/mm<sup>2</sup>, medens  $n$  sættes til 10.

Ifølge (17) har man

$$20000 = x^2 \cdot 0,63, \quad \text{hvoraf } x = 178,2 \text{ mm.}$$

Ifølge (23) er

$$20000 = \frac{10 \cdot 950 \cdot J}{10 \cdot 3^2 \cdot 1000^2}, \quad \text{altsaa}$$

$$J = \frac{1}{12} x^4 = \frac{20000 \cdot 1000^2 \cdot 3^2 \cdot 10}{10 \cdot 950}, \quad \text{hvoraf}$$

$$x = 218,4 \text{ mm.}$$

Søjlen kan altsaa af Hensyn til Styrken passende være af 22 cm × 22 cm Tømmer.

Eksp. 75. Hvor meget kan en 3 m høj, hul cirkulær Søjle af Smedejærn bære, naar den udvendige Diameter

$D = 130$  mm og den indvendige  $d = 115$  mm?  $E = 20000$  kg/mm<sup>2</sup>,  $k_t = 7,5$  kg/mm<sup>2</sup> og  $n = 5$ .

$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (130^4 - 115^4) = 5443000 \text{ mm}^4.$$

Ifølge (23) er

$$P = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 5443000}{5 \cdot 3000^2} = 24180 \text{ kg.}$$

Ifølge (17) er

$$P = 7,5 \cdot \frac{\pi}{4} (130^2 - 115^2) = 21670 \text{ kg.}$$

Søjlen bør altsaa kun belastes med 21600 kg.

Ekspl. 76. Hvor stort et Tryk tør man byde en 5 m høj Smedejærns Søjle af det paa Fig. 95 viste Tværnsnit, der er dannet af to  $\square$ -Jærn Profil Nr. 10 og to 10 mm tykke Smedejærnsplader?  $n = 4$ .

Antages det betragtede Tværnsnit ikke at indeholde Nittehuller, ville Inertimenterne med Hensyn til  $XX$  og  $YY$  være henholdsvis  $J_x = 13220000$  mm<sup>4</sup> og  $J_y = 10640000$  mm<sup>4</sup>. Søjlen vil, da  $J_y < J_x$ , bøje sig efter Retningen  $XX$ , og Belastningen maa altsaa findes ved

$$P = \frac{10 EJ_y}{n \cdot L^2} = \frac{10 \cdot 20000 \cdot 10640000}{4 \cdot 5000^2} = 21280 \text{ kg.}$$

Søjle's Tværnsnitsareal er 5700 mm<sup>2</sup>. Ved (17) vilde man for  $k_t = 7,5$  kg/mm<sup>2</sup> finde  $P = 42760$  kg.

Søjlen maa altsaa kun belastes med 21000 kg.

Ekspl. 77. En Støbejærns Søjle, 4 m lang og af det paa Fig. 96 viste hule kvadratiske Tværnsnit, skal kunne bære 20000 kg. Find Tværnsnitsdimensionerne, naar  $E = 10000$  kg/mm<sup>2</sup> og  $n = 6$ .

$$\text{Af } P = \frac{10 EJ}{n L^2} \text{ faar man } J = 19200000 \text{ mm}^4.$$

Kaldes Godstykke'sen  $x$ , og antages det udvendige Kvadrats Side at være  $10x$ , medens Siden i det indvendige Kvadrat altsaa bliver  $8x$ , findes Inertimomentet med Hensyn til saavel  $XX$  som  $YY$  at være

$$J = \frac{1}{12} [(10x)^4 - (8x)^4] = 492x^4; \\ 492x^4 = 19200000; x = 14,05 \text{ mm.}$$

Kvadratsiderne kunne derefter passende gøres 141 mm og 112,5 mm, hvorved Godstykke'sen bliver 14,25 mm.

Ved Benyttelsen af (17) vil Søjlen vise sig stærk nok til at modstaa den direkte Sammentrykning.

Ekspl. 78. En Søjle af valset Kvadrantjærn, der er 5 m høj, skal bære 40000 kg. Hvilket Profil Nr. i Tabel VII. G. skal man bruge, naar  $E = 20000$  kg/mm<sup>2</sup> og  $n = 5$ ?

Ved Benyttelse af (23) faar man  $J = 25000000$  mm<sup>4</sup>. Hertil svarer Profil Nr. 7 $\frac{1}{2}$ , som ogsaa vil være stærkt nok til at modstaa den direkte Sammentrykning.

### 3. Forskydning.

Virke to parallelle Kræfter i modsatte Retninger paa to Tværnsnit af et Legeme, der ligge umiddelbart opad hinanden, ville Kræfterne søge at forskyde de to Tværnsnit i Forhold til hinanden. Man siger da, at Legemet paavirkes til Forskydning eller Overklipping. Materialet vil imod denne Paavirkning frembyde en Modstand af samme Størrelse, for saa vidt der ikke indtræder Brud, og denne Modstand kan ligesom ved Strækning og Sammentrykning betragtes som jævnfordelt over hele det Tværnsnitsareal, i hvilket Paavirkningen til Forskydning finder Sted. Kaldes den ydre Paavirkning  $P$ , Tværnsnitsarealet  $A$  og den Paavirkning pr. Kvadratenhed af Tvær-

snitsarealet, som vil svare til Brud,  $K_f$ , vil der indtræde Brud i Konstruktionsdelen, naar

$$P = A \cdot K_f. \quad (24)$$

$K_f$  udtrykkes i  $\text{kg/mm}^2$ , og Værdier af den findes for en Del Materialers Vedkommende angivne paa Tabel II. Ligning (24) benyttes til at bestemme, hvor stor en Kraft der kræves for at overklippe en Konstruktionsdel af bekendt Materiale og Tværnsnit.

Ekspl. 79. Ved Hjælp af en Lokkemaskine skal der i en 15 mm tyk Smedejærns Plade udhugges (lokkes) cylindriske Huller af 25 mm Diameter. Hvor stor Kraft udfordres dertil, naar  $K_f = 24 \text{ kg/mm}^2$ ?

Ifølge (24) har man

$$P = \pi \cdot 25 \cdot 15 \cdot 24 = 28274 \text{ kg.}$$

$P$  bør dog gøres noget større, for at Bruddet kan ske lettere.

Skal man bestemme Tværnsnitsdimensionerne af en Konstruktionsdel, der udsættes for Paavirkning til Forskydning, saaledes at der ikke er nogen Fare for Brud, maa man benytte en Paavirkning pr. Arealenhed, som kun er en Brøkdel af  $K_f$ . Denne Værdi angiver den tilladelige Paavirkning pr. Arealenhed for Forskydning og betegnes ved  $k_f$ . Værdier for  $k_f$ , som i Almindelighed er  $0,8 \cdot k_s$ , findes angivne paa Tabellerne III og IV i  $\text{kg/mm}^2$ .

$$\text{Ligning} \quad P = A \cdot k_f \quad (25)$$

vil altsaa være at benytte dels til Bestemmelse af den Paavirkning  $P$ , som man med Sikkerhed tør byde et givet Areal til Forskydning, uden at behøve at frygte for, at der skal indtræde Brud, dels til at finde, hvor stort et

Tværnsnitsareal  $A$  Legemet maa have paa vedkommende Sted, for at det tør udsættes for Virkningen af en given forskydende Kraft  $P$ .

Ekspl. 80. Et Træspær  $A$  (Fig. 97) er tappet ned i Bjælken  $B$ .  $A$  og  $B$  ere af 15 cm  $\times$  15 cm Fyrretømmer og danne  $45^\circ$  med hinanden. Gennem  $A$  virker der en sammentrykkende Kraft paa 3000 kg. Find den Bjælkelængde  $x$ , som af Hensyn til den forskydende Kraft maa være udenfor Tappen.

$$\text{Til Forskydning vil virke } P = \frac{3000}{\sqrt{2}} = 2122 \text{ kg.}$$

Sættes  $P = 2125 \text{ kg}$  og  $k_f = 0,07 \text{ kg/mm}^2$ , vil man, da der til at modstaa Forskydningen findes tre Arealer, alle af Længde  $x$  og Bredde 5 cm, ved Benyttelse af (25) faa

$$2125 = 3 \cdot 50 \cdot x \cdot 0,07; \quad x = 202 \text{ mm.}$$

Vilde man undersøge Tappen for Forskydning, vil den vise sig at blive stærkere paavirket end forsvarligt, men man kan da sikre Forbindelsen ved Beslag, i hvilket Tilfælde  $x$  iøvrigt kan gøres noget mindre end den beregnede Værdi.

Blandt de Jærnkonstruktioner, i hvilke Forskydning forekommer, skal man særlig omtale Konstruktionsdele samlede ved Nitter og Bolte.

Nitninger.

Smedejærns- og Staalplader kunne samles ved de saakaldte Nitter eller Nagler, der ere smedede cirkulære Cylindre, som ved Enderne ere forsynede med Nittehoveder, hvoraf nogle almindeligt forekommende Former ere viste paa Fig. 98 og 99. Nittens ene Hoved har sin endelige Form forinden dens Anbringelse i Konstruktionen, medens det andet Hoved, efter at Nitten er anbragt paa sin Plads,

ved Hammerslag dannes af den cylindriske Del, som oprindelig er noget længere end den samlede Tykkelse af de Plader, som skulle samles. Fig. 98 viser en Nitte med fremstaaende Hoved, Fig. 99 en Nitte med forsænket Hoved.  $D = 1,5 d$  à  $1,6 d$ ;  $h = 0,5 d$  à  $0,6 d$  og  $o = \frac{1}{8} d$ .  $D_1 = 1,7 d$  à  $2 d$ ;  $h_1 = \frac{1}{3} d$  à  $0,4 d$ . Naar to Plader skulle samles ved Nitning, kan dette ske enten derved, at Pladerne samles direkte, idet den ene lægges et Stykke henover den anden, som vist paa Fig. 100 og 101, hvor Forbindelsen er tilvejebragt henholdsvis ved een og to Nitterækker, eller som i Fig. 102 og 103, hvor der er anvendt Stødplader eller Lasker, henholdsvis een og to. Antager man, at der i de to Plader, som skulle samles, virke de to ligestore, men modsatte Kræfter  $P$ , ville Nitterne netop paavirkes til Forskydning af Kraften  $P$ . I Fig. 100, 101 og 102 vil hver Nitte frembyde eet Tværnsitsareal til at modstaa Forskydningen; der vil altsaa i Fig. 100 og 102 i det Hele findes to Nittearealer og i Fig. 101 fire Nittearealer virksomme i saa Henseende. Derimod vil hver Nitte i Fig. 103 frembyde to Arealer til Modstand mod Forskydningen; her vil altsaa ialt fire Nittearealer yde Modstand. Betegnes Nittediametren ved  $d$ , vil man i Tilfældene Fig. 100 og 102, hvor der er to Nitter, af hvilke hver frembyder et Areal  $\frac{\pi}{4} d^2$ , ifølge (25) have

$$2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot k_f = P, \text{ hvoraf } d = \sqrt{\frac{2P}{\pi k_f}}$$

og i Tilfældene Fig. 101 og 103, hvor der findes fire Nittearealer virksomme hvert Sted,

$$4 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot k_f = P, \text{ hvoraf } d = \sqrt{\frac{P}{\pi k_f}}$$

I de nævnte Tilfælde var Antallet af virksomme Nitte-

arealer forud bekendt, og af dette Antal afhang igen Nittediametren, men ofte foretrækker man at gaa den modsatte Vej, idet man fastsætter Nittediametren og derefter beregner Antallet af Nittearealer. Kaldes dette Antal  $n$ , har man

$$\frac{\pi}{4} d^2 \cdot n \cdot k_f = P, \text{ hvoraf } n = \frac{4P}{\pi d^2 \cdot k_f} = \frac{1,27 P}{d^2 \cdot k_f}. \quad (26)$$

Betegner  $t$  Pladetykkelsen, kan man passende,

$$\left. \begin{array}{l} \text{naar } t < 12 \text{ mm, gøre } d = (t + 10) \text{ mm,} \\ \text{,, } t > 12 \text{ mm, ,, } d = (0,5t + 16) \text{ mm.} \end{array} \right\} \quad (27)$$

Ogsaa flere end to Plader kunne samles ved Nitning.

Hvor Plader af forskellig Tykkelse skulle samles, betegner  $t$  deres Middeltykkelse.

$d$  gøres i Reglen ikke over 26 mm.

For at Stødpladerne kunne være i Stand til at yde en ligesaa stor samlet Modstand mod Overrivning (Strækning) som de Plader, der skulle samles, maa man, hvor enkelt Stødplade anvendes, gøre dennes Tykkelse  $t_1 = t$ , medens Stødpladerne, naar der bruges to, hver bør have en Tykkelse af  $\frac{5}{8} t$  à  $\frac{3}{4} t$ .

Afstanden  $a$  mellem Nitterne i samme Plade bestemmes derved, at Pladen skal gøre samme Modstand som Nitterne mod den ydre Paavirkning.

I Tilfældene Fig. 100 og 102 har man altsaa

$$(a - d) t k_s = \frac{\pi}{4} d^2 k_f, \text{ hvoraf } a = d + \frac{\pi d^2 k_f}{4 t k_s}.$$

Indsættes heri  $k_f = \frac{4}{3} k_s$ , bliver

$$a = d + 0,63 \frac{d^2}{t},$$

og i Tilfældene Fig. 101 og 103

$$(a - d) t k_s = 2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 k_f, \text{ hvoraf } a = d + \frac{\pi d^2 k_f}{2 t k_s},$$

som for  $k_f = \frac{4}{5} k_s$  bliver til

$$a = d + 1,26 \frac{d^2}{t}.$$

Afstanden  $e$  til Pladeranden kan passende sættes til  $2d$ , naar der er een Række Nitter, og til  $1,6d$ , hvis der benyttes to eller flere Nitterækker. Afstanden  $b$  mellem Nitterækkerne sættes til  $0,8a$ , naar Nitterne sidde lige bagved hinanden som i Fig. 101, og til  $0,5a$  à  $0,6a$ , naar de som i Fig. 104 ere forsatte i Forhold til hinanden. Naar de ovenfor angivne Afstande ere bestemte, vil saavel Pladernes Bredde som Stødpladernes eller Overdækningernes Længde let kunne findes.

Ekspl. 81. To Smedejærnsbaand, 12 mm tykke, paavirktes til Strækning af 10000 kg og skulle samles ved Nitning.

Da  $t = 12$  mm, faar man ifølge (27)

$$d = (t + 10) \text{ mm} = 22 \text{ mm}.$$

Af  $n = \frac{1,27 P}{d^2 k_f}$ , hvor  $k_f = 7,2$  kg/mm<sup>2</sup>,  $P = 10000$  kg og  $d = 22$  mm, faas  $n = 3,644$ ;  $4 > n > 3$ .

Samles Pladerne som i Fig. 101, maa der anvendes fire Nitter i Samlingen.

$$a = d + 1,26 \frac{d^2}{t} = \text{ca. } 73 \text{ mm}.$$

Pladerne maa altsaa gøres 146 mm brede,  $e = 1,6d = 35,5$  mm og  $b = 0,8a = 58,5$  mm.

Overdækningens Længde bliver derved 129,5 mm.

Benyttes der to Stødplader, maa der anbringes to Nitter paa hver Side af Stødet.  $a = 73$  mm,  $e = 2d = 44$  mm,  $t_1 = \frac{5}{8} t = 7,5$  mm. Stødpladernes Længde bliver  $4e = 176$  mm.

I det foreliggende Eksempel kunde der naturligvis godt anvendes enkelt Stødplade og i saa Fald dobbelt Nitterække paa hver Side af Stødet.

Gaar Paavirkningen i Pladerne bort fra hinanden (Pladerne strækkes), behøve de ikke, hvor Samlingsplade anvendes, at støde imod hinanden; trykkes Pladerne derimod ind imod hinanden, bør de støde til hinanden og ved Stødet være nøjagtigt afrettede vinkelret paa den Retning, hvorefter Kraften virker, for at Berøringen kan blive saa inderlig som mulig.

Den Maade, hvorpaa Nittesamlinger iøvrigt indrettes, vil afhænge af hvert enkelt foreliggende Tilfælde. Til nærmere Oplysning skal anføres et Par Eksempler.

Ekspl. 82. Paa Fig. 105 er der vist en ved et Spær-fag forekommende Samling af tre Baand og een Stiver. I Punktet  $O$  tænkes Baandenes og Stivernes Akser ved Forlængelse at støde sammen. Baandene  $OA$ ,  $OC$  og  $OD$  paavirktes henholdsvis af 12000 kg, 1500 kg og 9000 kg til Strækning, medens Stiveren  $OB$  paavirktes til Sammentrykning af 3000 kg.  $OA$  og  $OD$  dannes af 14 mm tykt Baandjærn og  $OC$  af 6 mm tykt Baandjærn. Samlingen er tænkt ordnet saaledes som angivet paa Figuren, hvor Baandene støde mod en 14 mm tyk Samlingsplade af Smedejærn, til hvilken de ere befæstede ved enkelte Stødplader. Stiveren bestaar derimod af to Vinkeljærn, som ligge hver paa sin Side af den 14 mm Samlingsplade. Til Samlingen er der anvendt Nitter, som ere anbragte saaledes, at der i de yderste Nitterækker kun findes een



Nitte, hvorved Baandenes Bredde indskrænkes saa meget som muligt. Fremdeles ere Nitterne overalt forsatte for hinanden.  $k_s = 9 \text{ kg/mm}^2$  og  $k_f = 7,2 \text{ kg/mm}^2$ .

Baandet  $OA$ .

Nittediametren  $d = 7 + 16 = 23 \text{ mm}$ .

Antallet af Nittearealer og altsaa ogsaa af Nitter er

$$\text{ifølge (26)} \quad n = \frac{1,27 \cdot 12000}{23^2 \cdot 7,2}; \quad n = 4.$$

Vil man beregne Baandets Bredde under Forudsætning af, at det vilde briste over den enkelte Nitte til venstre, bliver Bredden

$$x = 23 + \frac{12000}{14 \cdot 9} = 118 \text{ mm}.$$

Forudsættes Baandet at ville briste over de mellemste Nitter, bliver

$$x = 2 \cdot 23 + \frac{12000 - \frac{\pi \cdot 23^2}{4} \cdot 7,2}{14 \cdot 9} = 118 \text{ mm},$$

idet den enkelte Nitte til venstre da samtidig maatte briste, for at Forbindelsen skulde ophøre.

Baandet  $OD$ .

$$d = 23 \text{ mm}, \quad n = \frac{1,27 \cdot 9000}{23^2 \cdot 7,2}; \quad n = 3.$$

Baandets Bredde bliver

$$y = 23 + \frac{9000}{14 \cdot 9} = 95 \text{ mm}.$$

Stødpladerne ved disse to Baand blive 14 mm tykke.

Stødpladen ved Baandet  $OC$  gøres 6 mm tyk.

Nitterne, som forbinde den 6 mm Stødplade og Baandet  $OC$ , faa Diametren  $d = 16 \text{ mm}$ .

$$n = \frac{1,27 \cdot 1500}{16^2 \cdot 7,2}; \quad n = 2.$$

Nitterne, som forbinde den 14 mm Samlingsplade og den 6 mm Stødplade, faa Diametren  $d = 20 \text{ mm}$ .

$$n = \frac{1,27 \cdot 1500}{20^2 \cdot 7,2}; \quad n = 1.$$

$$\text{Baandets Bredde } z = 20 + \frac{1500}{6 \cdot 9} = 48 \text{ mm}.$$

Til Stiveren  $OB$ , som i Spærfaget har en Længde af 2 m, er tænkt benyttet to Vinkeljærn med en indbyrdes Afstand af 14 mm, saaledes at de kunne befæstes hver paa sin Side af Samlingspladsen (se Fig. 106). Disse Vinkeljærns mindste Inertimoment i den omtalte Stilling skal være lig med eller større end den Værdi, som man faar for  $J$  af Ligning (23), naar  $n = 5$ . Da  $P = 3000$ ,  $E = 20000$  og  $L = 2000$ , faar man  $J = 300000 \text{ mm}^4$ .

Vælges Profil Nr.  $\frac{4}{6}$  (Tabel VII.B), og stilles Vinkeljærnene som vist paa Fig. 106, vil Inertimomentet ved en Undersøgelse vise sig at være mindst med Hensyn til  $XX$  Aksen, nemlig 346000, og de to Vinkeljærn altsaa tilstrækkeligt stærke, eftersom Arealet ogsaa er stort nok til at modstaa den direkte Sammentrykning.

Nittediametren kan sættes til 18 mm, da Middeltykkelsen af Pladerne, som skulle samles, er 8 mm.

$$n = \frac{1,27 \cdot 3000}{18^2 \cdot 7,2}; \quad n = 2.$$

Een Nitte vil saaledes være tilstrækkelig, da den frembyder to Arealer til at modstaa Forskydningen. For at gøre Forbindelsen yderligere sikker, bør der dog, som vist paa Figuren, anbringes to Nitter.

Naar en Konstruktionsdel, der paavirkes til Sammentrykning, saaledes som den her forekommende Stiver, bestaar af flere Stykker (her to Vinkeljærn), der skulle virke sammen, bør man, for fuldtud at opnaa dette, paa pas-

sende Steder (i Afstande af 0,5 m à 1 m) forbinde de enkelte Stykker ved Nitning, idet et lille Pladestykke af passende Tykkelse (her 14 mm) lægges imellem Stykkerne paa vedkommende Sted. Til saadanne Forbindelser kan godt anvendes mindre Nitter.

Med Hensyn til Nitters Anbringelse i Samlinger bør det iagttages, at de saavidt muligt ordnes symmetrisk med Hensyn til vedkommende Baand eller Stivers geometriske Akse.

Ekspl. 83. Fig. 107 viser i to Projektioner en sammenbundet Pladejærnsdrager med Stødfordbelse i Hoved og Krop. Den 8 mm Kropplade er ved Vinkeljærn Profil Nr. 8 og ved 20 mm Nitter samlet med de 10 mm Plader i Hoved og Fod.

Nitterne anbringes i Almindelighed med samme indbyrdes Afstand paa hele Dragerens Længde.

Kaldes Reaktionen i Understøtningerne  $Q$  udtrykt i kg, Dragerens Højde  $h$ , dens Kroptykkelse  $\delta$ , Nitte-diameteren  $d$ , Nitteafstanden  $a$ , disse udtrykte i mm, og kaldes Materialets tilladelige Paavirkning i kg/mm<sup>2</sup> til Forskydning  $k_f$ , kan man sætte

$$a = 12,6 \frac{d \delta h}{Q}, \text{ naar } d \geq 1,6 \delta \text{ og}$$

$$a = 1,8 \frac{\pi d^2 \cdot k_f \cdot h}{Q}, \text{ naar } d < 1,6 \delta.$$

Finder man  $a > 6 d$ , gøres  $a = 6 d$ .

Den mindste brugelige Afstand er 2,5  $d$  à 3  $d$ .

Finder man ved Beregningen et mindre  $a$  (paa Grund af at Dragerens Hoved er meget svært), maa man forøge Kroptykkelsen og formindske Tværsnittet af Hovedet.

Ved Stødene anbringes Stødplader, hvis Tykkelse bestemmes i Henhold til det foregaaende.

I Hovedet er der tænkt anbragt enkelt Stødplade; dennes Tykkelse bliver altsaa her 10 mm. Kaldes det nyttige Tværsnitsareal i den overskaarne Plade  $A$  og Summen af de Nittearealer, som maa findes i Samlingen for at yde en lige saa stor Modstand mod Forskydning, som Pladen yder mod Strækning eller Sammentrykning,  $N$ , kan man bestemme Antallet af virksomme Nittearealer paa følgende Maade:  $A \cdot k_s = N \cdot k_f$ . For  $k_f = \frac{4}{3} k_s$  faar man

$$N = \frac{5A}{4}. \text{ Da } N = n \cdot \frac{\pi}{4} d^2, \text{ bliver } n = \frac{5A}{\pi d^2}.$$

Tværsnitsarealet af den i Hovedet indgaaende Plade er, naar Nittehullerne fradrages, 1600 mm<sup>2</sup>, altsaa  $n = 7$ .

Da hver Nitte frembyder eet Areal mod Forskydning, vilde det være tilstrækkeligt at anbringe 7 Nitter paa hver Side af Stødet, men da der sidder to og to Nitter ved Siden af hinanden, kommer der til at indgaa otte Nitter i Samlingen paa hver Side af Stødet, og derved er Stødpladens Længde bestemt. En Samling i Foden maa i dette Tilfælde blive ganske som Samlingen i Hovedet. Nitterne i Kroppens Samling kan man give en lidt mindre Diameter end Nitterne i Hoved og Fod, da Pladernes Middeltykkelse i Kroppen er mindre end de to andre Steder. Sættes  $d = 17$  mm, vil Antallet af Nittearealer, da Kroppladens nyttige Tværsnitsareal er ca. 5000 mm<sup>2</sup>, blive 28. Eftersom hver Nitte frembyder to Arealer til at modstaa Forskydningen, bliver Antallet af Nitter fjorten paa hver Side af Stødet. De fjorten Nitter anbringes bedst i tre Rækker, som vist paa Figuren. For Stødpladernes Vedkommende vil der være størst Fare for Bristning over den Stødet nærmest værende Nitterække. Stødpladernes nyttige Tværsnitsareal bør derfor paa dette Sted være mindst ligesaa

stort som det nyttige Tværnsitsareal af den stødte Kropplade. Deres Tykkelse  $t_1$  faar man da af Ligningen

$$(480 - 5 \cdot 17) 2t_1 = 5000, \text{ hvoraf } t_1 = 7 \text{ mm.}$$

Bolte.

Boltene ere ligesom Nitterne retstaaende cirkulære Smedejærns cylindre, som i den ene Ende ere forsynede med et fast Hoved, Boltehovedet, medens den anden Ende er skrueskaaren. Her paaskrues et løst Hoved, den saakaldte Møttrik, under hvilken der ofte anbringes en Underlagsskive. Boltehoved og Møttrik kunne have meget forskellige Tværnsitsformer (Kvadrat, regulær Seks-kant eller Cirkel). Paa Fig. 108 er der vist en Bolt med sekskantet Hoved, Møttrik og Underlagsskive.

Er Boltediametren  $d$  udtrykt i Millimeter, bliver  $D = 5 + 1,4 d$ ;  $D_1 = 1,155 D$ ;  $U = 1,3 D$ ;  $u = 0,1 D$ ;  $H = d$ ;  $h = 0,7 d$ .

Bolte kunne benyttes baade til Samling af Smedejærns- og Støbejærnsdele. De kunne paavirkes enten efter deres Længderetning (til Strækning eller Sammentrykning) eller ogsaa tværs paa Længderetningen (til Forskydning eller Bøjning og ofte i ringe Grad tillige til Vridning). Hvis man vil tage Hensyn til denne Vridning, kan det ske ved, at man regner med Paavirkninger pr. Arealenhed, der ere lavere, end man ellers vilde benytte.

Udsættes en Bolt for en strækkende eller sammentrykkende Paavirkning, beregnes Kærnediametren i den skrueskaarne Del for den ydre Paavirkning, og Boltens faar da paa den ikke skrueskaarne Del samme Diameter som Skruens ydre Diameter.

Kaldes Kærnediametren  $d_1$  og Skruens ydre Diameter  $d$ , begge udtrykte i Millimeter, kan man passende sætte  $d_1 = 0,9 d - 1,3$ .

Med Hensyn til Beregningen af Boltens Tværnsitsdimen-

sioner, naar de faa en Paavirkning vinkelret paa deres Længderetning, skal man bemærke, at de kunne beregnes til Forskydning, hvis de Dele, som skulle samles, ere spændte meget stærkt ind imod hinanden. Er dette ikke Tilfældet, ville Boltene ogsaa faa en bøjende Paavirkning, og de bør i saa Fald beregnes for denne Paavirkning, hvilket vil blive nærmere omtalt senere, under Afsnittet om Bøjning.

Beregnes Boltene for Forskydning, bør man dog, af Hensyn til den mulig samtidige bøjende Paavirkning, byde Materialet en mindre Paavirkning, end man ellers vilde lægge til Grund for Beregningen.

Ekspl. 84. Fig. 109 viser, hvorledes et Spær i den Ende, hvor det skal hvile paa Muren, kan samles med et Baand af Rundjærn. Spæret hviler i en saakaldt Sko af Støbejærn. I Samlingens lodrette Billede er Spæret vist i Skoen, i det vandrette Billede er det tænkt borttaget. Igennem Baandet virker en Kraft paa 6000 kg. Kærnediametren af Rundjærnsstangen  $A$  vil paa den skrueskaarne Del, naar  $k_s = 6 \text{ kg/mm}^2$ , kunne findes af

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot 6 = 6000; d_1 = \sqrt{\frac{4000}{\pi}} = 35,89 \text{ mm}; d_1 = 36 \text{ mm.}$$

Af  $d_1 = 0,9 d - 1,3$  faar man Stangens Diameter  $d = 41,5 \text{ mm}$ .

Igennem hver af Gafflen  $B$ 's to Grene virker der 3000 kg. Giver man dem rektangulært Tværnsnit med Højde  $h = 2b$ , faar man  $2b \cdot b \cdot 6 = 3000$ .

$$b = \sqrt{250} = \text{ca. } 16 \text{ mm, } h \text{ altsaa } 32 \text{ mm.}$$

Da det 6000 kg store Træk muligvis vil fordele sig noget ulige paa Gafflens to Grene, kan der dog være Anledning til at gøre  $b$  og  $h$  lidt større, f. Eks. henholdsvis 20 mm og 40 mm.

Bolten vil for hver af Gafflens Grene frembyde eet Tvær-  
snitsareal mod Forskydning. Sættes  $k_f = 4,8 \text{ kg/mm}^2$ , faar  
man dens Diameter  $d_o$  af Ligningen

$$\frac{\pi}{4} d_o^2 \cdot 4,8 = 3000; d_o = \sqrt{\frac{3000 \cdot 4}{\pi \cdot 4,8}} = 28,2 \text{ mm}; d_o = 30 \text{ mm.}$$

Bredden  $b_o$  af Jærnet i Øskenen (Fig. 110) kan bestem-  
mes ved, at Øskenen skal frembyde et Tværnsnitsareal lige-  
saa stort som Tværnsnitsarealet af Gafflens ene Gren mod  
Strækning, altsaa  $b_o \cdot 20 = 20 \cdot 40$ , hvoraf  $b_o = 40 \text{ mm}$ .

Eksp. 85. I Fig. 111 stode tre Stænger sammen i  $O$ .  
De paavirkes alle til Strækning, nemlig  $AO$  af 6800 kg,  
 $OB$  af 2000 kg og  $OC$  af 5200 kg. Stængerne gøres af  
Rundjærn, og deres Diametre blive under Forudsætning  
af, at  $k_s = 9 \text{ kg/mm}^2$ , henholdsvis 32 mm, 17 mm og  
28 mm. Stængerne forsynes alle med Øskener af samme  
Tykkelse, nemlig 32 mm, og samles indbyrdes imellem to  
Smedejærns Plader af Tykkelse 16 mm ved Bolte gennem  
Øskenerne. Disse Bolte ville hver for sig frembyde to  
Tværnsnitsarealer til Modstand mod Forskydning. Sættes  
 $k_f$  til 6  $\text{kg/mm}^2$ , bliver Diametren af Boltene gennem  
 $AO$ ,  $OB$  og  $OC$ , ifølge Ligningen  $2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot k_f = P$ , hen-  
holdsvis 27 mm, 15 mm og 24 mm.

Bredden  $b_o$  af Jærnet i Øskenerne bliver i Henhold til  
den i det foregaaende Eksempel anførte Regel henholdsvis  
26 mm, 8 mm og 20 mm.

Afstandene  $a_1$ ,  $a_2$  og  $a_3$  mellem Boltene og Pladeran-  
den i Retning af Stængernes geometriske Akse kan be-  
stemmes derved, at de to Plader tilsammen paa disse  
Steder skulle have ligesaa store Tværnsnitsarealer som  
Rundjærnsstængerne, altsaa  $\frac{1}{4} \pi \cdot 32^2 = 2 \cdot 16 a_1$ , hvoraf  
 $a_1 = 26 \text{ mm}$ .

Paa samme Maade findes  $a_2 = 8 \text{ mm}$  og  $a_3 = 20 \text{ mm}$ .  
Der kan dog være Grund til at gøre Afstandene lidt større,  
nemlig henholdsvis 32 mm, 10 mm og 25 mm, da to  
16 mm Plader ikke yde saa stor Modstand som een 32 mm  
Plade.

Afstandene mellem Boltehullernes Centrere og Plade-  
randen blive derved paa disse Steder henholdsvis 45,5 mm,  
17,5 mm og 37 mm.

Ved saavel Nitte- som Boltensamlinger bør man iøvrigt,  
særlig hvor de Stykker, som skulle samles, ere tynde,  
undersøge, om der ikke er Fare for Knusning af Materialet.  
Pladen eller Øskenen anses for stærk nok, naar et rektan-  
gulært Areal, hvis Sider ere Hullets Diameter og henholds-  
vis Pladens eller Øskenens Tykkelse, er stort nok til at  
modstaa Knusning. Er dette ikke Tilfældet, bør Pladen  
forstærkes paa vedkommende Sted eller Øskenen være  
tykkere.

#### 4. Bøjning.

Et prismatisk Legeme, der er understøttet i to eller  
flere Punkter eller er indspændt i den ene Ende, vil, naar  
det paavirkes af Kræfter vinkelrette paa dets Længderet-  
ning, antage en krum Form, blive bøjet. Formen afhænger  
dels af den Maade, hvorpaa Legemet er understøttet, dels  
af dets Længde, dels af den samlede Belastning og dens  
Fordeling, dels endelig af vedkommende Materiales Mod-  
standsevne mod ydre Paavirkninger. Formforandringen vil  
dog i Almindelighed for de Materialers Vedkommende, som  
forekomme i Bygnings- og Maskinkonstruktioner, være  
meget ringe indenfor Proportionalitetsgrænsen, eller man  
vil i alt Fald som oftest forlange, at Formforandringen  
holdes indenfor snævre Grænser.

Fig. 112<sup>a</sup> forestiller lodret Billede af et vandret liggende prismatisk Legeme  $ABCD$ , som er indspændt i den ene Ende ved  $AD$ , og i den anden Ende  $BC$  paavirket af en lodret nedad virkende Kraft  $P$ . Fig. 112<sup>b</sup> angiver et Snit i Legemet vinkelret paa dets Længderetning.

Legemet kan tænkes bestaaende af en overordentlig stor Mængde ganske tynde prismatiske Legemer af samme Længde som Legemet og med deres Endeflader i Legemets Endeflader, i hvilke de indgaa som Arealelementer. Disse tynde prismatiske Legemer kaldes Legemets Fibre. Idet Legemet under  $P$ 's Virkning bøjes, viser det sig, at Fibrene paa Legemets øverste Del forlænges, og at Fibrene paa den underste Del forkortes, medens der mellem de forlængede og forkortede Fibre findes et Lag Fibre, hvis Længde ikke forandres, og som, forinden  $P$  begynder at virke, ligge i et vandret Plan. Samtidig med at Legemet bøjes, gaar dette Plan over til at blive en Cylinderflade, som kaldes den neutrale Flade, fordi de i den liggende Fibre ikke undergaa nogen Længdeforandring. Fremdeles viser det sig, at Fibrene forlænges eller forkortes desto mere, jo fjernere de ligge fra den neutrale Flade henholdsvis over og under den.

Paa Fig. 112<sup>a</sup> angiver  $AEKD$  Legemets Form efter Bøjningen og  $GMUH$  den neutrale Flade.

Betegnes et vilkaarligt Tværnsnit i Legemet ved  $NMO$ , punkteret, hvor Legemet har Formen  $ABCD$ , og fuldt optrukket i Figuren  $AEKD$ , og antages dette Tværnsnit at ligge i Afstanden  $x$  fra  $BC$ , har man i Ligevægtslæren paavist, at Kraften  $P$ 's Virkning paa dette Tværnsnit ytrer sig som en enkelt Kraft  $P$  i Tværnittet og et Bøjningsmoment  $P \cdot x$ , nemlig  $P$ 's Moment med Hensyn til Tværnittets Tyngdepunkt. Den enkelte Kraft  $P$  i Tværnittet virker lodret nedad og vil søge at forskyde den til højre for Tværnittet liggende Del af Legemet i Forhold til den

anden Del. Imod denne Forskydning maa Legemets Fibre yde en Modstand lodret opad af Størrelse  $P$ . Denne Modstand betegnes ved  $F$ , og den vil ifølge Afsnittet om Forskydning fordele sig jævnt over hele Tværnsnitsarealet. Bøjningsmomentet  $P \cdot x$  vil søge at dreje den til højre for  $NMO$  liggende Del af Legemet fra venstre til højre omkring Skæringslinien  $MM$  mellem Tværnittet  $NMO$  og den neutrale Flade, altsaa med Uhrets Visere, hvorved Fibrene over den neutrale Flade ville paavirkes til Strækning og Fibrene under den til Sammentrykning.

Saasart Legemet ikke krummes yderligere, maa dette hidrøre fra, at der til venstre for  $NMO$  i de enkelte Fibre over den neutrale Flade er fremkaldt Modstande mod deres Strækning netop saa store som de strækkende Kræfter, der svare til Forlængelserne, og i de enkelte Fibre under den neutrale Flade Modstande saa store som de sammentrykkende Kræfter, der svare til Forkortelserne. Modstandene mod Strækning maa virke til venstre, og Modstandene mod Sammentrykning til højre. Betragter man et andet med  $NMO$  parallelt Tværnsnit, som ligger i en Afstand derfra, som er  $MU = L$ , vil dette Tværnsnit, naar Legemet bøjes, blive drejet i Forhold til  $NMO$  og antage Stillingen  $JUS$ . Dette Snit saavel som  $NMO$  forudsættes under Bøjningen at forblive plant. Lægges der nu gennem  $U$  et Snit  $RUQ$  parallelt med  $NMO$ , ser man, hvorledes Forlængelserne og Forkortelserne af de enkelte Fibre ville stille sig.

Betegnes det samlede Tværnsnitsareal af de over den neutrale Flade i Afstanden  $y$  fra denne liggende Fibre ved  $a$ , og det Stykke, hvormed Længden  $L$  forøges, ved  $e$ , vil ifølge Formel (13) Side 105 den Kraft, som svarer til Forlængelsen  $e$ , altsaa ogsaa Modstanden, være udtrykt ved

$$\frac{a E e}{L}$$

Da Fibrene forlænges desto mere, jo fjernere de ligge fra den neutrale Flade, vil  $\frac{e}{e_s} = \frac{y}{y_s}$ , hvor  $y_s$  betegner Afstanden fra den neutrale Flade til de yderste Fibre paa Legemets konvekse Side og  $e_s$  disses Forlængelse. Indsættes den heraf for  $e$  fundne Værdi  $e = \frac{e_s \cdot y}{y_s}$  i Udtrykket for Modstanden, bliver dette til

$$\frac{a E e_s y}{L y_s}$$

Heri kan  $y$  antage alle mulige Værdier mellem 0 og  $y_s$ , men samtidig vil ogsaa  $a$  variere paa en Maade, der er afhængig af Tværnittets Form.

Modstanden mod Sammentrykning af de i Afstanden  $y'$  fra den neutrale Flade paa Legemets underste Del liggende Fibre, hvis samlede Tværnitsareal betegnes ved  $a'$ , og som forkortes et Stykke  $e'$ , bliver ifølge Formel (16)

$$\frac{a' E e'}{L}$$

hvor man for  $e'$  kan indsætte den af  $\frac{e'}{e_s} = \frac{y'}{y_s}$  fundne Værdi

$e' = \frac{e_s y'}{y_s}$ , hvorved Udtrykket for Modstanden bliver

$$\frac{a' E e_s y'}{L y_s}$$

$y'$  kan antage alle Værdier mellem 0 og  $y_s$ , der er Afstanden fra den neutrale Flade til de stærkest sammentrykkede Fibre. Samtidig med at  $y'$  skifter Værdi, varierer ogsaa  $a'$ .

Medens den ydre Kraft  $P$ , som nævnt, vil søge dels at dreje den til højre for Tværnittet  $NMO$  liggende Del af Legemet dels at forskyde den lodret nedad, ville de omtalte ved  $P$ 's Virkning i Tværnittet fremkaldte Mod-

stande søge at forhindre disse Bevægelser, og der maa, hvis Legemet ikke yderligere skal forandre Form, være Ligevægt mellem den ydre Kraft og disse Modstande, som selv ere virkende Kræfter. Ifølge Ligevægtslæren vil der være Ligevægt mellem et System af Kræfter, naar de tre Ligevægtsligninger (se Side 26) ere tilfredsstillende, nemlig:

1) at Summen af Kræfternes vandrette Komposanter er Nul. Da  $P$  og  $F$  ere lodrette, medens de øvrige Modstande ere vandrette, vil denne Ligning komme til at angive, at Summen af disse sidste Modstande skal være Nul. Ligningen bliver da

$$\sum \frac{a E e_s y}{L y_s} - \sum \frac{a' E e_s y'}{L y_s} = 0,$$

idet Kræfterne, som virke til venstre, regnes for positive, og de, der virke til højre, for negative. I denne Ligning angive Sigmategnene Summen af de Størrelser, som man faar ved at lade  $y$  og  $y'$  antage alle mulige Værdier indenfor de forhen angivne Grænser, medens selvfølgelig samtidig  $a$  og  $a'$  variere paa den ved Tværnitsformen bestemte Maade. Ved udenfor Sigmategnene, der tillige virke som Parenteser, at sætte de for alle Addenderne fælles Faktorer, bliver Ligningen til

$$\frac{E e_s}{L y_s} (\sum a y - \sum a' y') = 0,$$

hvoraf man faar  $\sum a y - \sum a' y' = 0$ , (28)

som udtrykker, at Summen af Arealdeles Momenter med Hensyn til Linien  $MM$  er Nul. Da Arealerne paa hver Side af  $MM$  saaledes ere i Ligevægt om denne, maa  $MM$  gaa gennem Tværnittets Tyngdepunkt. Den er Skæringslinien mellem Tværnittet og den neutrale Flade og kaldes den neutrale Akse. Det fremgaar altsaa af (28), at

Tværsnittets neutrale Akse gaar gennem dets Tyngdepunkt.

2) at Summen af Kræfternes lodrette Komposanter er Nul. Denne Ligning vil i det foreliggende Tilfælde, hvor Kraften  $P$  og Modstanden  $F$  begge ere lodrette, medens de øvrige Modstande ere vandrette, blive til  $P - F = 0$ , naar Retningen lodret nedad regnes for positiv.

Virkede der i Stedet for den enkelte Kraft  $P$  flere lodrette Kræfter til højre for Tværsnittet, vilde man i Stedet for  $P$  i Ligningen faa Summen af alle disse Kræfter, hvorved den bliver til

$$\Sigma P - F = 0, \quad (29)$$

hvor  $\Sigma P$  er den forskydende Kraft i Tværsnittet.

3) at Summen af Kræfternes Momenter er Nul.

Da den ydre Kraft vil søge at dreje den til højre for Tværsnittet liggende Del af Legemet om den neutrale Akse  $MM$ , vil det være naturligst at opstille Ligevægtsligningen mellem Momenterne af Kræfterne med Hensyn til denne Akse. Momentligningen vil i saa Fald blive

$$P \cdot x - \Sigma \frac{a E e_s y^2}{L y_s} - \Sigma \frac{a' E e_s y'^2}{L y_s} = 0.$$

Virkede der i Stedet for den ene Kraft flere Kræfter til højre for  $NMO$ , vilde man i Stedet for  $P \cdot x$  faa Summen af alle disse Kræfters Momenter med Hensyn til Tværsnittets Tyngdepunkt, eller med andre Ord den Størrelse, der tidligere er betegnet ved  $M_b$  og kaldt Bøjningsmomentet med Hensyn til Tværsnittet. Ligningens almindelige Form bliver herved til

$$M_b - \frac{E e_s}{L y_s} \Sigma (a y^2 + a' y'^2) = 0,$$

idet de for Addenderne fælles Faktorer ere satte udenfor Sigmategnet. Her variere selvfølgelig ogsaa  $a$ ,  $y$ ,  $a'$  og  $y'$ , som tidligere anført. Udtrykket  $\Sigma (a y^2 + a' y'^2)$  er netop

den Størrelse, som under Afsnittet om Sammentrykning er kaldt Tværsnittets Inertimoment med Hensyn til  $MM$  som Akse, og som betegnes ved  $J$ . Ved Indførelse af  $J$  bliver Ligningen til

$$M_b = \frac{E e_s J}{L y_s}. \quad (30)$$

Havde man, den Gang Udtrykkene for de vandrette Modstande mod Strækning og Sammentrykning bleve fundne, i Stedet for at indføre  $y_s$  og  $e_s$ , indført  $y_t$  og  $e_t$ , hvor  $y_t$  angiver Afstanden fra den neutrale Akse til de yderste Fibre paa Legemets konkave Side og  $e_t$  disse Fibres Forkortelse, vilde man have faaet Ligningen

$$M_b = \frac{E e_t J}{L y_t}. \quad (31)$$

De to for  $M_b$  fundne Udtryk ere ganske analoge og gælde begge indenfor Proportionalitetsgrænsen.

Skal man bestemme, hvilke Tværnsnitsdimensioner man bør give Konstruktionsdele, der udsættes for bøjende Kræfter, eller omvendt, hvilke bøjende Kræfter man tør lade virke paa Konstruktionsdele af givne Tværnsnitsdimensioner, maa man ligesom ved Strækning og Sammentrykning i Stedet for  $\frac{E e_s}{L}$  indføre den tilladelige Paavirkning  $k_s$  for Strækning og i Stedet for  $\frac{E e_t}{L}$  den tilladelige Paavirkning  $k_t$  for Sammentrykning.

Derved blive Ligningerne (30) og (31) henholdsvis til

$$M_b = \frac{k_s}{y_s} J \quad (32) \quad \text{og} \quad M_b = \frac{k_t}{y_t} J. \quad (33)$$

Naar de bøjende Kræfter ere givne i Størrelse, Retning og Beliggenhed, hvorved  $M_b$  kan findes, maa man til Bestemmelse af Tværnsnitsdimensionerne af vedkommende

Konstruktionsdel benytte den af de to sidst anførte Ligninger, som giver størst Værdi for  $J$ . Naar  $\frac{k_s}{y_s} < \frac{k_t}{y_t}$ , maa altsaa den første benyttes, og i modsat Fald den anden. Ere derimod Tværnittets Størrelse og Form givne, maa man til Bestemmelse af de bøjende Paavirkninger, som man tør udsætte Konstruktionsdelen for, benytte den af Ligningerne, som giver den mindste Værdi af  $M_b$ .\*)

Af Ligningerne (32) og (33) fremgaar det, at jo større  $M_b$  bliver, desto større bliver ogsaa  $J$ . Deraf følger, at man, naar en Aksel eller Bjælke, som udelukkende paavirkes af Kræfter vinkelrette paa Længderetningen, skal have samme Tværsnitsareal paa alle Steder, maa bestemme Tværnittet efter det Sted, med Hensyn til hvilket  $M_b$  er størst. Vil man tillige tage Hensyn til den i Tværnittet virkende forskydende Kraft, som dog i Almindelighed har meget ringe Indflydelse paa Dimensionerne, gør man det paa den i Afsnittet „Sammensatte Paavirkninger“ angivne Maade.

Naar Akslen eller Bjælken ikke overalt skal have samme Tværsnitsareal, maa man bestemme Tværnittene paa de forskellige Steder efter de Bøjningsmomenter, som virke med Hensyn til vedkommende Sted.

Forinden der anføres specielle Eksempler paa Anvendelsen af det i nærværende Afsnit udviklede, skal man endnu omtale de Formforandringer, som Konstruktionsdele, der paavirkes paa de nedenfor angivne Maader, undergaa. Formlerne ere udledede ved den højere Matematik.

\*) Anm. Det er netop paa Grund af den ved lange Søjlers Belastning indtrædende Bøjning, at Inertimomentet kommer til at indgaa i de Formler, som benyttes til Bestemmelse af Søjlerens Tværsnitsdimensioner, naar der skal tages Hensyn til Bøjningen, samt at man maa bestemme Inertimomentet med Hensyn til en Linie, som gaar gennem Tværnittets Tyngdepunkt og staar vinkelret paa den Retning, i hvilken Søjlen lettest vil bøje sig.

Naar den i Fig. 113 viste Bjælke er indspændt ved  $G$ , medens der ved  $H$  virker en Kraft  $P$  lodret nedad, vil Punktet  $H$  synke et Stykke  $t_1$  under den vandrette Linie gennem  $G$  af Størrelse  $t_1 = \frac{1}{3} \frac{P l^3}{EJ}$ . (34)

Paavirkes Bjælken af en jævnfordelt Belastning  $P$ , bliver  $t_1 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{EJ} = \frac{1}{8} \frac{P l^3}{EJ}$ . (35)

Er en Bjælke understøttet ved Enderne og i Midten paavirket af  $P$  lodret nedad, vil den største Nedbøjning finde Sted her. Den bliver, naar Bjælkens fritliggende er  $l$ ,

$$t_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{EJ} = \frac{1}{48} \frac{P l^3}{EJ}. \quad (36)$$

Er Kraften jævnfordelt over hele Længden, bliver Nedbøjningen i Midten

$$t_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{P l^3}{EJ} = \frac{5}{384} \frac{P l^3}{EJ}. \quad (37)$$

Ekspl. 86. En Aksel af Smedejærn af Længde 4,2 m er simpelt understøttet ved Enderne og modtager i Punkter, der ligge 1 m, 2,2 m og 3,2 m fra Akslens ene Ende, Tryk lodret nedad paa henholdsvis 1000 kg, 2000 kg og 800 kg. Find Akslens Diameter, naar  $k_s = 3 \text{ kg/mm}^2$ .

Reaktionerne blive ca. 1895 kg og ca. 1905 kg. Da Forskydningen skifter Fortegn i det Tværnit, hvor de 2000 kg virke, vil Bøjningsmomentet blive størst med Hensyn til dette, nemlig  $M_b = 2991000 \text{ kgmm}$ .

$J = \frac{\pi}{64} d^4$ ;  $y = \frac{1}{2} d$ . Ved at indsætte disse Værdier i Ligning (32), faar man

$$2991000 = 3 \cdot \frac{\pi}{32} d^3; \quad d = 216 \text{ mm}.$$



Ekspl. 87. Den paa Fig. 107 viste Pladejærnsdrager er simpelt understøttet ved Enderne. Den har et fritliggende af 8 m og paavirkes af en jævnfordelt Belastning af 22000 kg.  $k_s = 7,5$  kg/mm<sup>2</sup>. Dragerens Tværsnit skal bestemmes.

En saadan Draggers Højde  $h$  kan passende sættes til  $\frac{1}{12}$  à  $\frac{1}{15}$  af Spændvidden  $s$  og dens Kroptykkelse til  $\frac{1}{1000}$   $s$ , dog ikke gerne mindre end 8 mm. Sætter man  $h$  til  $\frac{1}{12}$   $s$ , bliver den 660 mm;  $t = 8$  mm. Kaldes det samlede Areal af de to Vinkeljærn og Pladen i Hovedet  $A$ , faar man for Inertimomentet  $J_1$  af Hovedet og Foden med Hensyn til en vandret Akse gennem Tværsnittets Tyngdepunkt, naar Afstanden mellem Hovedets og Fodens Tyngdepunkter kaldes  $h_1$ , tilnærmelsesvis Værdien

$$J_1 = 2 \cdot A \cdot \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = \frac{A h_1^2}{2}.$$

Inertimomentet  $J_2$  af Kroppen bliver tilnærmelsesvis  $\frac{1}{12} t h_1^3$ , og Tværsnittets Inertimoment altsaa

$$J = \frac{A h_1^2}{2} + \frac{1}{12} t h_1^3, \text{ hvorved man ifølge (32) vil faa}$$

$$M_b = \frac{k_s}{\left(\frac{h_1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{A h_1^2}{2} + \frac{1}{12} t h_1^3\right) = k_s h_1 \left(A + \frac{1}{6} t h_1\right).$$

Naar hele Højden er 660 mm, kan  $h_1$  passende sættes til 600 mm. Indsætter man Værdierne for  $M_b$ ,  $k_s$ ,  $h_1$  og  $t$  i Ligningen, finder man  $A = 4100$  mm<sup>2</sup>. Det paa Fig. 107<sup>b</sup> viste Tværsnit, som bestaar af en 10 mm tyk Plade og to Stk. Vinkeljærn Profil Nr. 8, samlede ved 20 mm Nitter, vil, idet Nittehullerne trækkes fra, netop have den angivne Størrelse, naar Pladebredden gøres 190 mm. Regner man Tværsnittet nøjagtigt ud, vil man, ved at lade Pladebredden  $B$  være ukendt, af Ligningen

$$\frac{1}{8} \cdot 22000 \cdot 8000 = \frac{7,5}{330} \cdot \frac{1}{12} [(B-40) \cdot 660^3 - (B-168) \cdot 640^3 - 100 \cdot 620^3 - 20 \cdot 480^3]$$

faa  $B = 202$  mm. Sættes  $B$  til 200 mm, vil  $k_s$  kun blive ganske lidt større end  $7,5$  kg/mm<sup>2</sup>.

Ekspl. 88. Gulvet i et Lokale, der er 7,5 m bredt og 15,2 m langt (se Figur 114) belastes med jævnfordelt Belastning af 400 kg/m<sup>2</sup>. Etageadskillelsens Vægt kan regnes til 200 kg/m<sup>2</sup>. Gulvbræderne bæres af Træbjælker paa tværs i Lokalet med en indbyrdes Afstand af 0,95 m fra Midte til Midte. Disse Træbjælker hvile foruden paa Murene tillige paa en Jærndrager, der anbringes paa langs af Lokalet under Gulvets Midtlinie. Tværsnitsdimensionerne af Gulvbræderne, Træbjælkerne og Jærndrageren skulle bestemmes.

Gulvbræderne kan man passende gøre 15 cm brede. Da de i det højeste faa et fritliggende af 0,95 m, vil der paa dette Stykke af Brættet, for en Belastning af 400 kg/m<sup>2</sup>, komme et jævnfordelt Tryk af  $400 \cdot 0,95 \cdot 0,15 = 57$  kg.

$$M_b = \frac{1}{8} P l = \frac{1}{8} \cdot 57 \cdot 950 = 6769 \text{ kgmm.}$$

Anvendes der Fyrretræs Bræder, er  $k_t = 0,63$  kg/mm<sup>2</sup>, og man har altsaa

$$6769 = \frac{0,63 \cdot \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot x^3}{\frac{1}{2} x},$$

hvor  $x$  er Brædernes Tykkelse.  $x = \text{ca. } 21$  mm.

Mød denne Tykkelse vilde Bræderne i Midten synke et Stykke

$$t = \frac{5}{384} \cdot \frac{P l^3}{E J} = \frac{5 \cdot 57 \cdot 950^3}{384 \cdot 950 \cdot \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 21^3} = 5,8 \text{ mm.}$$

Dels er denne Nedsænkning større end tilladelig, og dels maa man tage Hensyn til det stærke Slid, som et

Gulv udsættes for. Bræderne bør derfor være stærkere og kunne passende gøres 40 mm tykke. Nedsænkningen vil i saa Fald vise sig kun at blive 0,839 mm, altsaa meget ringe.

Træbjælkerne have et fritliggende af 3,75 m, og paa hver af dem kommer der til at hvile en jævnfordelt Belastning af  $0,95 \cdot 3,75 \cdot 600 = 2138$  kg. Altsaa bliver

$$M_b = \frac{1}{8} \cdot 2138 \cdot 3750 = 1002000 \text{ kgmm.}$$

Anvendes der Bjælker af Fyrretræ med kvadratisk Tværsnit, faar man  $1002000 = 0,63 \cdot \frac{1}{8} x^3$ ;  $x = 212,1$  mm.

Man kan altsaa passende bruge 22 cm  $\times$  22 cm Tømmer.

Jærndrageren. Antages der til Støtte for denne anbragt en Søjle ved *A*, vil Dragerens fritliggende blive 7,6 m. Den paavirkes i syv Punkter af 2138 kg hvert Sted. Reaktionen i Understøtningspunkterne blive altsaa hver 7483 kg. Det farligste Tværsnit bliver i Midten ved *B*, og Momentligningen med Hensyn hertil er

$$M_b = 7483 \cdot 3800 - 2138 (2850 + 1900 + 950) \\ = 16250000 \text{ kgmm.}$$

Sættes  $k_s = 9$  kg, faar man  $\frac{J}{y} = \frac{16250000}{9} = 1805555 \text{ mm}^3$ .

En  $\text{I}$  Drager Profil Nr. 45 vil altsaa kunne bruges eller ogsaa, hvis man foretrækker det, to ved Siden af hinanden liggende Jærnbjælker af Profil Nr. 34. Paa Søjlen vil der, naar Dragerens Vægt anslaaes til 1800 kg, hvorved Drageren og dens Belastning tilsammen udgøre ca. 36000 kg, komme til at hvile et Tryk af Størrelse  $\frac{5}{8}$  heraf eller ialt ca. 22500 kg. Udelades Søjlen i Midten, vil Dragerens fritliggende blive 15,2 m, og det farligste Tværsnit vil være i *A*, med Hensyn til hvilket Punkt Bøjningsmomentet bliver ca. 65030000 kgmm.

For  $k_s = 9$  kg/mm<sup>2</sup> bliver  $\frac{J}{y} = \text{ca. } 7225000 \text{ mm}^3$ .

Hér antages benyttet en sammennittet Jærndrager, f. Eks. af det paa Fig. 115 viste Profil. Hoved og Fod bestaa hver af to Stkr. 25 mm Plader og ere samlede med de to 10 mm tykke Kroppe ved fire Vinkeljærn af Profil Nr. 8. Nitterne ere af 26 mm Diameter.

Ethvert af Vinkeljærnene har et Tværsnitsareal af 1510 mm<sup>2</sup>, og det samlede Inertimoment af de to paa samme Side af den neutrale Akse *XX* liggende Vinkeljærn er 1750000 mm<sup>4</sup> med Hensyn til Linien *MM* gennem deres fælles Tyngdepunkt. Afstanden fra *MM* til *XX* er 176,6 mm. Inertimomentet med Hensyn til *XX* bliver altsaa

$$J = \frac{1}{12} [360 (500^3 - 400^3) + 20 \cdot 400^3 - 52 (500^3 - 380^3)] \\ + 2 (1750000 + 3020 \cdot 176,6^2) = \text{ca. } 1824000000 \text{ mm}^4.$$

Da Dragerens hele Højde er 500 mm, vil  $y = 250$  mm, altsaa  $\frac{J}{y} = 7292000 \text{ mm}^3$ . Bjælken er saaledes stærk nok.

I Stedet for at bestemme Inertimomentet paa den ovenfor angivne Maade, kunde man ogsaa have fundet det ved fra Inertimomentet af Rektanglet med Siderne 360 mm og 500 mm at subtrahere Inertimomenterne af de ved de punkterede Linier paa Figuren antydede ikke skraverede Rektangler, som ligge indenfor det førstnævnte Rektangels Omkreds. Nitterne i Hoved og Fod tænkes anbragte i samme lodrette Plan, medens de Nitter, som samle Kroppene med Vinkeljærnene, og hvis Diameter passende kan sættes til 20 mm, anbringes midt imellem de førstnævnte. For et Tværsnit, i hvilket Kroppenes Nitter findes, vil  $\frac{J}{y}$  være større end det ovenfor fundne  $\frac{J}{y}$ .

Ekspl. 89. Hvor stor jævnfordelt Belastning tør man lade det i forrige Eksempel beregnede Gulvbræt, der er 15 cm  $\times$  4 cm, bære, naar det stilles paa Højkant og der bydes Materialet 0,63 kg/mm<sup>2</sup>?

$\frac{1}{8} \cdot P \cdot 950 = 0,63 \cdot \frac{1}{6} \cdot 40 \cdot 150^2$ ;  $P = 795,8$  kg,  
medens Brættet liggende paa Fladen kun vil kunne bære  
212,2 kg.

Ekspl. 90. En Etageadskillelse bæres af  $\Gamma$ -formede  
Smedejærnsdragere, mellem hvilke der er anbragt Bølge-  
blik. Jærndragerne have et fritliggende af 7,2 m, og deres  
Afstand fra Midte til Midte er 2 m. Belastningen vil ialt  
være 500 kg/m<sup>2</sup>. Bestem Dragerne og Bølgeblikket.  $k_s$  kan  
sættes til 7,5 kg/mm<sup>2</sup>.

Dragerne. Belastningen paa hver Drager vil være  
7,2 · 2 · 500 = 7200 kg. Det farligste Tværsnit er i Midten  
af Drageren, med Hensyn til hvilket

$$M_b = \frac{1}{8} \cdot 7200 \cdot 7200 = 6480000 \text{ kgmm};$$

$\frac{J}{y} = \frac{6480000}{7,5} = 864000$ .  $\Gamma$  Profil Nr. 34 kan benyttes.

Bølgeblikket. Dettets fritliggende bliver 2 m. Paa  
et 1 m bredt Bælte af det vil der altsaa komme en jævn-  
fordelt Belastning af 1000 kg.

For det farligste Tværsnit, som er i Midten, vil Bøj-  
ningsmomentet være  $M_b = \frac{1}{8} \cdot 1000 \cdot 2000$  kgmm,

altsaa bliver  $\frac{J}{y} = \frac{1000 \cdot 2000}{8 \cdot 7,5} = 33333 \text{ mm}^3$ .

Fig. 116 viser Tværsnittet af et Stykke af en Bølge-  
blikplade, som passende kan bruges i det foreliggende  
Tilfælde, nemlig Profil Nr. 4. Inertimomentet af et saadant  
100 mm bredt Stykke med Hensyn til  $XX$  vil være det  
samme som Inertimomentet af den Figur, som fremkommer,  
naar man drejer den ene Halvdal af Figuren 180° om  
Linien  $FG$ . Denne Halvdels nye Stilling er vist punk-  
teret. Den krumme Dels udvendige Diameter vil blive  
51,5 mm og dens indvendige Diameter 48,5 mm. Ved Hjælp

af Halvcirkelens og Rektanglets Inertimomenter bestemmes  
Figurens Inertimoment uden stor Vanskelighed.

Det vil for et 1 m bredt Stykke være  $J = \text{ca. } 1170000$   
mm<sup>4</sup>; altsaa bliver  $\frac{J}{y} = \frac{1170000}{30,75} = \text{ca. } 38000 \text{ mm}^3$ .

Bølgeblikket er saaledes tilstrækkelig stærkt.

Ekspl. 91. En Støbejærnsdrager af det paa Fig. 117  
viste Tværsnit er indspændt i den ene Ende og har et  
fritliggende af 1 m. Med hvor stor jævnfordelt Vægt tør  
man belaste Bjælken?

Tværsnittets Tyngdepunkt bestemmes ved Ligningen  
 $105 \cdot 25 \cdot 12,5 + 130 \cdot 25 \cdot 65 = 25 \cdot 235 \cdot y$ , hvoraf  $y =$   
41,5 mm; altsaa er  $y' = 88,5$  mm. Inertimomentet med  
Hensyn til  $XX$  bliver

$$J = \frac{1}{3} (130 \cdot 41,5^3 + 105 \cdot 16,5^3 + 25 \cdot 88,5^3) = 9037000 \text{ mm}^4.$$

Naar  $k_s = 3$  kg/mm<sup>2</sup> og  $k_t = 6,75$  kg/mm<sup>2</sup>, vil

$$k_s \cdot \frac{J}{y} = \frac{3 \cdot 9037000}{41,5} \quad \text{og} \quad k_t \cdot \frac{J}{y'} = \frac{6,75 \cdot 9037000}{88,5}.$$

Man ser let, at det første af disse Udtryk er det mind-  
ste, og Ligningen til Bestemmelse af  $P$  vil altsaa være

$$\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot P = \frac{3 \cdot 9037000}{41,5}; \quad P = 1306 \text{ kg.}$$

Naar Støbejærnsbjælker ønskes anvendte, er det meget  
almindeligt, at man lader deres forskellige Tværsnit variere  
saaledes, at de netop svare til de i dem virkende Spæn-  
dinger, da man paa den Maade forbruger mindst Materiale.  
Paa Fig. 118 er der vist en i den ene Ende fastspændt  
Bjælke af fritliggende  $l$ . Den antages belastet af en jævn-  
fordelt Byrde  $P$ , og den skal have rektangulært Tværsnit.  
Ser man ligesom i alle de foregaaende Eksempler bort fra  
den i de enkelte Tværsnit virkende forskydende Kraft,  
bliver der kun at tage Hensyn til Bøjningsmomentet.

Dette vil for et Tværnsnit i Afstanden  $x$  fra den frie Ende være  $\frac{1}{2} x \cdot \frac{Px}{l}$ , og Momentligningen vil altsaa, naar Tværnsnittets Bredde kaldes  $b$  og dets Højde  $y$ , blive

$$\frac{1}{2} \frac{Px^2}{l} = \frac{k_s}{6} b y^2 \text{ eller } \frac{3}{l} \frac{Px^2}{l} = k_s b y^2,$$

hvoraf man faar  $y = x \sqrt{\frac{3P}{k_s b l}}$ .

Bjælken vil, naar  $b$  er konstant og  $y$  varierer, faa den paa Figuren viste Form, nemlig begrænset for oven af et vandret Plan og fornedet af et Skraaplan. For  $x=0$  bliver  $y=0$ , altsaa teoretisk ingen Tykkelse i den frie Ende, og for  $x=l$  bliver

$$y = \sqrt{\frac{3Pl}{k_s b}},$$

som er Højden ved Indspændingen. Foruden Bøjningsmomentet virker der imidlertid ogsaa en forskydende Kraft i de enkelte Tværnsnit, hvorfor man af denne Grund maa gøre Bjælken noget højere. Forskydningens Indflydelse i dette Tilfælde er nærmere oplyst i Ekspl. 98.

I alle de foregaaende Eksempler har man ved Beregningen af Tværnsnitsdimensionerne af Konstruktionsdele, som paavirkes til Bøjning, forudsat, at Bøjningsmomenterne virkede i et af de Planer, som indeholde en af Tværnsnittets Hovedakser. Der forekommer imidlertid Tilfælde, hvor Bøjningsmomentet nok indeholder Konstruktionsdelens Længdeakse, men ikke nogen af Tværnsnittets Hovedakser, og dette finder bl. a. Sted ved de paa Spærfag hvilende Aase.

Lad Fig. 119 forestille Tværnsnittet af en saadan Aas.  $T$  er dets Tyngdepunkt og  $LL_1$  samt  $NN_1$  dets Hovedakser. Bøjningsmomentet antages at virke i det Plan, som er bestemt ved Aasens Længdeakse og Linien  $TX$ , som danner  $\angle v$  med  $TL$ .  $LL_1$  og  $NN_1$  tages til

Koordinatakser med positive Retninger  $TL$  og  $TN$ , og Vinklen  $v$  regnes positiv i Omdrejningsretningen mod Uhret. Bøjningsmomentet  $M_b$  kan opløses i to andre Bøjningsmomenter  $M_1$  og  $M_2$ , der virke i Planer, bestemte ved Længdeaksen og henholdsvis  $LL_1$  og  $NN_1$ .  $M_1 = M_b \cos v$  og  $M_2 = M_b \sin v$ .

Betragter man en Arealenhed  $B$ , hvis Tyngdepunkt er bestemt ved Koordinaterne  $l$  og  $n$ , vil denne Arealenhed ifølge (33) fra  $M_1$  modtage en Paavirkning til Sammentrykning af Størrelse

$$\frac{M_b \cos v \cdot l}{J_n}$$

og fra  $M_2$  ifølge (32) en Paavirkning til Strækning af Størrelse

$$\frac{M_b \sin v \cdot n}{J_l} \quad k = \frac{M_b}{y} + \frac{M_b}{y}$$

naar  $J_n$  og  $J_l$  betegne Inertimomenterne med Hensyn til henholdsvis  $NN_1$  og  $LL_1$ . Arealenheden modtager altsaa i det Hele en Paavirkning til Sammentrykning af

$$\text{Størrelse } t = M_b \left( \frac{l \cos v}{J_n} - \frac{n \sin v}{J_l} \right). \quad (38)$$

Bliver  $t$  positiv, sammentrykkes vedkommende Fiber, bliver  $t$  negativ, strækkes den.

I denne Ligning maa  $l$  og  $n$  indsættes med Fortegn. De stærkest sammentrykkede og de stærkest strakte Fibre findes paa Figuren henholdsvis ved  $C$  og  $D$ . For at Aasen kan anses for at være tilstrækkelig stærk, maa  $t$ 's største Værdier, eftersom de ere positive eller negative, være mindre end henholdsvis  $k_t$  eller  $k_s$ .

Ekspl. 92. I et Tag, hvis Hældning mod det vandrette Plan er 2:5, indgaar der Aase, som have et fritliggende af 3 m og som bære en jævnfordelt Belastning af 1200 kg. Man skal undersøge, hvilken Paavirkning en saadan Aas

af **I** Tværsnit Profil Nr. 20 faar i sine stærkest paavirkede Fibre.

$$M_b = \frac{1}{8} \cdot 1200 \cdot 3000 = 450000 \text{ kgmm.}$$

$$\text{tg } v = \text{tg } u = \frac{2}{5}, \quad v = 21,8^\circ.$$

Da  $J_n = 21390000$ ,  $J_l = 1170000$ ,  $l = + 100$  og  $n = + 45$ , faar man ved Ligning (38)

$$t = + 450000 \left( \frac{100 \cos 21,8^\circ}{21390000} + \frac{45 \sin 21,8^\circ}{1170000} \right);$$

$$t = + 8,38 \text{ kg/mm}^2.$$

Ekspl. 93. Hvor stor Paavirkning ville de stærkest paavirkede Fibre faa, naar Aasen (se Fig. 120) dannes af Z-Jærn Profil Nr. 12, Tabel VII. F?

$$J_n = 4700000, \quad J_l = 377000, \quad l = \text{ca. } 60 \cos \alpha \text{ og } n = \text{ca. } 60 \sin \alpha.$$

$$u = 21,8^\circ. \quad \text{Ifølge Tabellen er } \text{tg } \alpha = 0,433, \text{ altsaa}$$

$$\alpha = 24,41^\circ; \quad v = u - \alpha = - (24,41 - 21,8) = - 2,61^\circ.$$

Ifølge (38) bliver Paavirkningen paa Fibrene ved B

$$t = 450000 \left( \frac{60 \cos 24,41^\circ \cdot \cos 2,61^\circ}{4700000} \right.$$

$$\left. + \frac{60 \sin 24,41^\circ \cdot \sin 2,61^\circ}{377000} \right); \quad t = 6,57 \text{ kg/mm}^2.$$

Vil man undersøge den Paavirkning, som Fibrene ved C faa, maa man først finde Punktets C's Koordinater  $l_1$  og  $n_1$ .

$$l_1 = l + 60 \sin 24,41^\circ = 60 (\cos 24,41^\circ + \sin 24,41^\circ)$$

$$= 79,45.$$

$$n_1 = n - 60 \cos 24,41^\circ = 60 (\sin 24,41^\circ - \cos 24,41^\circ)$$

$$= - 29,85.$$

$$t = 450000 \left( \frac{79,45 \cdot \cos 2,61^\circ}{4700000} - \frac{29,85 \sin 2,61^\circ}{377000} \right);$$

$$t = 5,98 \text{ kg/mm}^2.$$

Fibrene ved C paavirkes altsaa ogsaa til Sammentryk-

ning. De stærkest sammentrykkede Fibrer i dette Eksempel paavirkes adskilligt mindre end i det foregaaende, men **I**-Jærnets Tværsnitsareal er 3340 mm<sup>2</sup>, medens Z-Jærnets kun er 1820 mm<sup>2</sup>, hvoraf man ser, hvor fordelagtigt det er at anvende det sidste fremfor det første. Dertil kommer, at Z-Jærnet langt lettere lader sig befæste end **I**-Jærnet. Vil man benytte **I**-Jærn, kan der være Anledning til at befæste dem saaledes, at Kroppen staar lodret.

Ønsker man i en Konstruktion at anvende Træbjælker, og det er umuligt at faa saadanne af tilstrækkelig stort Tværsnit, maa man, som omtalt i Bygningskonstruktionslæren, benytte Trædragere, der bestaa af oven over hinanden liggende Bjælker, som ere indbyrdes fast forbundne. Bjælkerne kunne samles enten ved Fortanding eller ved Fordybling.

Fig. 121 viser en fortandet Drager og Fig. 122 og 123 fordyblede Dragere; paa Fig. 122 ligge Bjælkerne tæt opad hinanden, paa Fig. 123 med et Mellemrum. Fig. 124 angiver Tværsnittet af en fortandet og Fig. 125 af en fordyblet Drager.

Med de paa Fig. 124 anførte Betegnelser vil man have

$$W = \frac{J}{y} = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{M_b}{k}, \quad \text{hvoraf man, naar } b = 0,42 h,$$

$$\text{faar} \quad h = \sqrt[3]{14,3 \frac{M_b}{k}}. \quad (39)$$

$b_o$  sættes til  $0,8 h$  à  $h$ ;  $t = 0,1 h$ ;  $d_o = 0,1 b$ .

For den fordyblede Dragere Vedkommende vil

$$W = \frac{J}{y} = \frac{\frac{1}{12} (b h^3 - b h_1^3)}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} b h^2 \left( 1 - \left( \frac{h_1}{h} \right)^3 \right) = \frac{M_b}{k}.$$

Man kan passende sætte  $h_1 = 0,14 h$ ;  $h' = 0,48 h$ ;  $h_o = 0,1 h'$ ;  $b = 0,36 h$ , og man vil da ved at løse Ligningen med Hensyn til  $h$  faa

$$h = \sqrt[3]{16,7 \frac{M_b}{k}} \quad (40)$$

$t$  bliver ved Understøtningerne  $0,14 h'$ , ved Midten af Drageren  $0,10 h'$  og midt imellem disse Steder  $0,12 h'$ .  
 $b_o = 3,0 t + 0,09 b$ .  $d_o = 0,1 b$ .

I (39) og (40) angiver  $M_b$  det største Bøjningsmoment.

Endnu skal særligt omtales Fodplader eller Fundamentplader for Søjler. Disse Plader, som paavirkes til Bøjning, dannes af Støbejern med eller uden Ribber, og kunne have kvadratiske, rektangulære eller cirkulære Grundflader, hvis Størrelse afhænger af den Modstand, som det i Fundamentet indgaaende Materiale, der kan være Mursten, Sandsten, Kalksten, Granit, m. m., kan yde mod Sammentrykning.

Ekspl. 94. En Træsøjle, der er  $2,65$  m høj og skal bære  $21000$  kg, har kvadratisk Tværsnit. Siden i Kvadratet vil da blive  $21$  cm. Antages Søjleens Fodplade at hvile paa et Fundament af gode Mursten i cementblandet Kalkmørtel, kan  $k_t$  sættes til  $0,11$  kg/mm<sup>2</sup>. Pladens Grundflade  $A$  bliver altsaa lig med  $\frac{21000}{0,11}$ . Gøres den kvadratisk, bliver Kvadratsiden  $x = \sqrt{\frac{21000}{0,11}}$ ;  $x = 44$  cm.

Giver man Pladen den paa Fig. 126 viste Form, hvor den samlede Pladetykkelse er  $t$ , der fordeler sig saaledes, at Pladens prismatiske Del har Tykkelsen  $\frac{1}{3} t$ , og den pyramidale Del Tykkelsen  $\frac{2}{3} t$ , kan man finde  $t$  paa følgende Maade: Fodpladen betragtes som indspændt i Midten, hvor Søjlen hviler med sin kvadratiske Grundflade, medens Reaktionen fra Fundamentet fordeler sig jævnt over hele Grundfladen. Da Reaktionen virker opad, vil den søge at

bøje den i Midten indspændte Plade opad, og det farligste Tværsnit vil være Tværsnittet  $KL$ .

Bøjningsmomentet med Hensyn til dette vil blive Produktet af Reaktionen paa den med  $BCDE$  betegnede Del af Grundfladen og  $\frac{1}{2} BC$ , altsaa er

$$M_b = \frac{21000 \cdot 115 \cdot 115}{440 \cdot 2} = 315600 \text{ kgmm.}$$

Den Afstand, hvori Trapezets Tyngdepunkt  $T_1$  ligger fra dets største Side (se Side 33), er

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t \cdot \frac{2 \cdot 240 + 440}{240 + 440} = 0,302 t.$$

Trapezets Areal  $A_1 = 227 t$  og Rektanglets Areal  $A_2 = 147 t$ .

Da Rektanglets Tyngdepunkt  $T_2$  ligger i Afstanden  $\frac{1}{6} t$  fra Tværsnittets underste Side, findes det fælles Tyngdepunkt  $T$ 's Afstand  $y$  herfra ved Ligningen

$$y(227 t + 147 t) = 227 t \cdot 0,635 t + 147 t \cdot 0,166 t, \\ \text{hvoraf } y = 0,446 t.$$

Trapezets Inertimoment med Hensyn til  $MM$  bliver ifølge Tabel V

$$J_t = \frac{240^2 + 4 \cdot 240 \cdot 440 + 440^2}{36(440 + 240)} \cdot \frac{2^3}{3^3} t^3 = 8,153 t^3,$$

og dets Inertimoment med Hensyn til Aksen  $XX$  gennem det fælles Tyngdepunkt

$$J'_t = 8,153 t^3 + 227 t (a + 0,333 t - y)^2 = 8,153 t^3 + \\ 227 t (0,302 t + 0,333 t - 0,446 t)^2 = 16,263 t^3.$$

Rektanglets Inertimoment med Hensyn til Linien  $NN$  bliver

$$J_r = \frac{1}{12} \cdot 440 \cdot 0,333^3 t^3 = 1,353 t^3,$$

og dets Inertimoment med Hensyn til den neutrale Akse  $XX$  bliver

$$J_r = 0,153 t^3 + 147 t (y - 1,66 t)^2 = 0,153 t^3 + \\ 147 t (0,446 t - 0,166 t)^2 = 11,683 t^3.$$

Tværsnittet  $KL$ 's Inertimoment med Hensyn til  $XX$  bliver altsaa

$$J = J'_t + J'_r = 16,263 t^3 + 11,683 t^3 = 27,946 t^3.$$

Ved i Momentligningen  $M_b = k_s \cdot \frac{J}{y}$  at sætte

$$M_b = 343700, J = 27,95 t^3, k_s = 3 \text{ kg/mm}^2 \text{ og}$$

$$y = 0,446 t, \text{ faar man } 315600 = 3 \cdot \frac{27,95 t^3}{0,446 t},$$

hvoraf 
$$t = \sqrt[3]{\frac{315600 \cdot 0,446}{3 \cdot 27,95}} = 40,97 \text{ mm.}$$

$t$  kan passende gøres 50 mm, hvorved  $\frac{1}{3}t = 16,7$  mm.  $\frac{1}{3}t$  bør aldrig være under 16 mm.

Hvorvidt der maatte være Fare for, at Pladen brydes efter en Linie vinkelret paa en af Diagonalerne, kan let undersøges bagefter.

### 5. Vridning.

Naar et prismatisk Legeme er indspændt i et af dets Tværsnit, medens der i et andet Tværsnit paa en Arm gennem dettes Tyngdepunkt virker to parallele og lige-store Kræfter i modsatte Retninger, paavirkes Legemet til Vridning paa det Stykke, som ligger mellem Tværsnittene.

Paa Fig. 127 ville altsaa Kræfterne  $P$ , der virke i Tværsnittet ved  $C$  paa Armen  $R$ , paavirke det prismatiske Legeme  $BC$ , som er indspændt ved  $B$ , og hvis Længde er  $L$ , til Vridning paa Stykket mellem  $B$  og  $C$ . I Stedet for Indspændingen ved  $B$  kan der her virke et Kraftpar af samme Størrelse som Kraftparret i  $C$ , men i modsat Retning. Kraftparret i  $C$  vil søge at forskyde Legemets enkelte Tværsnit paa en saadan Maade i Forhold til hverandre, at deres Tyngdepunkter vedblive at ligge i Legemets Akse. Fig. 128 viser tre tæt ved hverandre liggende Tværsnit  $A$ ,  $B$  og  $C$ , hvor Afstanden mellem  $A$  og  $B$  for-

udsættes at være den samme som Afstanden mellem  $B$  og  $C$ . Antages  $a$ ,  $b$  og  $c$  at være tre Punkter i disse Tværsnit, og at de, inden  $P$  begynder at virke, ligge i en med Aksen parallel Linie, ville Tværsnittene under Kraftparrets Virkning drejes saaledes i Forhold til hverandre om Legemets Akse, af  $c$  flytter sig en vis Vinkel i Forhold til  $b$ , medens samtidig  $b$  flytter sig en ligesaa stor Vinkel i Forhold til  $a$ . Men paa den Maade vil  $c$  i Forhold til  $a$  være drejet en dobbelt saa stor Vinkel som  $b$  i Forhold til  $a$ . Punktet  $b$  er kommet til  $b'$  og  $c$  til  $c'$ . Ogsaa her forudsætter man ligesom ved Bøjning, at Tværsnittene under Formforandringen vedblive at være plane. Da Tværsnittenes Tyngdepunkter ikke forandre Plads, vil fremdeles den i Aksen liggende Fiber ikke modtage nogen Paavirkning.

Mod den Vridning, som Kraftparret saaledes frembringer, maa Materialets Sammenhængskraft yde Modstand, og saalænge Legemet vedbliver at forholde sig elastisk, og Paavirkningen altsaa ikke har overskredet Elasticitetsgrænsen, vil Legemet igen antage den oprindelige Form, naar Kraftparret ophører at virke. Da Formforandringen indtræder derved, at Tværsnittene forskydes paa hverandre, maa Materialet yde Modstand mod Forskydning, og man har derfor ved Beregningen af Tværsnitsdimensionerne af prismatiske Legemer tidligere altid benyttet Værdierne for den tilladelige Paavirkning  $k_f$  for Forskydning. Ved Undersøgelser, der senere ere foretagne over Materialernes Modstandsevne mod forskellige Paavirkninger, har det vist sig, at nogle Materialer anstrænges mere ved at paavirkes til Vridning end ved at udsættes for almindelig Forskydning. De tilladelige Paavirkninger  $k_v$  for Vridning findes for Smedejærns, Staals og Støbejærns Vedkommende angivne paa Tabel III.

Jo længere de enkelte Fiberelementer ligge fra Tyngdepunktet, desto mere ville de, naar Legemet vrides, fjernes

fra deres oprindelige Plads, og Formforandringen vil altsaa være størst i de fra Legemets Akse fjernest liggende Fibre. Men jo større Formforandringen er, desto større er ogsaa Modstanden, og denne sidste vil altsaa blive proportional med Afstanden ind til Legemets Akse.

Paa Fig. 129 er der vist et Tværnsnit af Legemet, i hvilket forskellige Fiberelementers Arealer ere betegnede ved  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , medens deres Afstande fra Tværnsnittets Tyngdepunkt  $T$  kaldes  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ . Betegnes fremdeles de Modstande, som Fibrene ville yde pr. Arealenhed, ved  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ , har man

$$\frac{s_1}{p_1} = \frac{s_2}{p_2} = \frac{s_3}{p_3} = \dots = \frac{s_n}{p_n} = \frac{s}{p},$$

hvor  $s$  er den Modstand, som de yderste i Afstanden  $p$  fra Tyngdepunktet  $T$  liggende Fibre yde pr. Arealenhed.

Af disse Ligninger faar man:

$$s_1 = \frac{sp_1}{p}; \quad s_2 = \frac{sp_2}{p}; \quad s_3 = \frac{sp_3}{p}; \quad \dots; \quad s_n = \frac{sp_n}{p}.$$

De Modstande, som Arealerne  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  yde, blive altsaa henholdsvis

$$\frac{a_1 sp_1}{p}; \quad \frac{a_2 sp_2}{p}; \quad \frac{a_3 sp_3}{p}; \quad \dots; \quad \frac{a_n sp_n}{p},$$

og Momenterne af disse Modstande med Hensyn til  $T$  blive derefter

$$\frac{a_1 sp_1^2}{p}; \quad \frac{a_2 sp_2^2}{p}; \quad \frac{a_3 sp_3^2}{p}; \quad \dots; \quad \frac{a_n sp_n^2}{p};$$

For at der skal indtræde Ligevægt, maa Summen af disse Momenter være lig med Kraftparrets Moment, altsaa

$$P \cdot R = \frac{sa_1 p_1^2}{p} + \frac{sa_2 p_2^2}{p} + \frac{sa_3 p_3^2}{p} + \dots + \frac{sa_n p_n^2}{p} \\ = \frac{s}{p} (a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2 + \dots + a_n p_n^2).$$

Den indenfor Parentesen staaende Størrelse har en Form, som er ganske analog med det under Sammentrykning nærmere omtalte Inertimoment.

Det kaldes Tværnsnittets polære Inertimoment, fordi det er Inertimomentet med Hensyn til en Pol eller et Punkt, nemlig Tværnsnittets Tyngdepunkt, og ikke med Hensyn til en Linie. Det betegnes ved  $J_p$ .

Ligevægtsligningen bliver altsaa, idet Vridningsmomentet  $P \cdot R$  betegnes ved  $M_v$ , til

$$M_v = \frac{s \cdot J_p}{p}.$$

Den største Værdi, som man i Konstruktioner tør give  $s$ , betegnes, som foran omtalt, ved  $k_v$ , og Ligningen bliver derved til

$$M_v = k_v \cdot \frac{J_p}{p}. \quad (41)$$

Kender man et Areal's Inertimoment med Hensyn til to paa hinanden vinkelrette Akser, kan man ved Hjælp af disse Inertimomenter finde det polære Inertimoment.

Fig. 130 viser et Areal, hvis Inertimomenter med Hensyn til  $XX$  og  $YY$  antages bekendte. For et Arealelement, hvis Størrelse er  $a_1$ , og hvis Afstand fra  $T$  er  $p_1$ , medens dets Afstande fra  $XX$  og  $YY$  betegnes ved henholdsvis  $y_1$  og  $x_1$ , har man  $p_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ .

Ved at multiplicere paa begge Sider af Lighedstegnet med  $a_1$ , faar man  $a_1 p_1^2 = a_1 x_1^2 + a_1 y_1^2$ .

For et Arealelement af Størrelse  $a_2$ , beliggende i Afstandene  $x_2$  fra  $YY$ ,  $y_2$  fra  $XX$  og  $p_2$  fra  $T$ , har man paa samme Maade  $a_2 p_2^2 = a_2 x_2^2 + a_2 y_2^2$ .

For et tredje Arealelement faar man  $a_3 p_3^2 = a_3 x_3^2 + a_3 y_3^2$ .

For det  $n$ te Arealelement:  $a_n p_n^2 = a_n x_n^2 + a_n y_n^2$ .



Ved at addere alle disse Ligninger faar man

$$\Sigma ap^2 = \Sigma ax^2 + \Sigma ay^2,$$

men  $\Sigma ap^2$  er det polære Inertimoment  $J_p$ ,  $\Sigma ay^2$  er Inertimomentet  $J_x$  med Hensyn til  $XX$  og  $\Sigma ax^2$  er Inertimomentet  $J_y$  med Hensyn til  $YY$ . Følgelig er

$$J_p = J_x + J_y. \quad (42)$$

Ved Hjælp af denne Ligning kan man finde det polære Inertimoment for alle Tværsnit, forsaavidt de kunne antages under Legemets Vridning at forblive plane, og dette er som nævnt i Almindelighed tilladeligt.

For Cirklen faar man saaledes

$$J_p = \frac{\pi}{4} r^4 + \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{32} d^4,$$

naar  $r$  og  $d$  ere henholdsvis Radius og Diameter i Cirklen. Afstanden  $p$  fra Tyngdepunktet  $T$  til de yderste Fibre bliver  $\frac{d}{2}$ .

For Cirkelringen bliver  $J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$ , naar  $D$  og  $d$  betegne den største og mindste Diameter i Cirkelringen.  $p = \frac{D}{2}$ .

For Kvadratet er  $J_p = 2 \cdot \frac{1}{12} a^4 = \frac{1}{6} a^4$ , naar  $a$  er Kvadratsiden.  $p = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

(42) kan ikke anvendes ved et rektangulært Tværsnit, naar der er stor Forskel paa Størrelsen af Rektanglets to Sider, da Tværsnittet i saa Fald ikke kan antages at forblive plant under Vridningen.

Det er navnlig ved Bestemmelsen af Tværsnitsdimensionerne af Aksler, at der bliver Anvendelse for Vridningsteorien. Ere Akslerne korte og paavirkede de, foruden til Vridning, ikke tillige i væsentlig Grad til Bøjning, kan man bestemme deres Tværsnit ved Hjælp af Formel (41).

Ere Akslerne derimod lange, vil det Tilfælde kunne indtræde, at de to Tværsnit, mellem hvilke Vridningen finder Sted, selv om Akslen maatte være stærk nok, ville drejes mere end tilladeligt i Forhold til hinanden. Denne Snoning af Akslerne maa holdes indenfor en passende Grænse, og det kan kun opnaas ved at bestemme Tværsnittet, ikke af Hensyn til Styrken, men af Hensyn til Stivheden.

Som bemærket ville efter hinanden følgende Tværsnit, der ligge tæt opad hinanden og i ligestore indbyrdes Afstande, forskydes det samme Stykke i Forhold til hinanden, hvad enten Tværsnittene ligge paa det ene eller det andet Sted af det prismatiske Legeme. Denne Forskydning af to Nabotværsnit i Forhold til hinanden er meget ringe, men da Forskydningerne opsummere sig, kunne de to Tværsnit, i hvilke de ydre Kræfter angribe, blive drejede et kendeligt Stykke i Forhold til hinanden. Den Vinkel, som det ene Tværsnit drejes i Forhold til det andet, kaldes Vridningsvinklen. Den udtrykkes i Grader og betegnes ved  $\delta$  (se Fig. 131). Længden  $\alpha$  af den til  $\delta$  svarende Cirkelbue, hvis Centrum ligger i Tyngdepunktet og hvis Radius er 1, findes af Proportionen

$$\frac{\alpha}{2\pi \cdot 1} = \frac{\delta}{360}, \text{ hvoraf } \alpha = \frac{\pi \delta}{180}.$$

De yderste Fiberelementer, som ligge i Afstanden  $p$  fra  $T$ , ville altsaa drejes en Buelængde

$$p \alpha = \frac{\pi \delta p}{180}.$$

Vridningsvinklen vil foruden af Afstanden mellem de to omtalte Tværsnit i høj Grad afhænge af Materialets Art og Beskaffenhed, og man maa derfor ogsaa her ligesom ved Strækning og Sammentrykning indføre den saakaldte Elasticitetskoefficient. Ved Elasticitetskoefficienten for Forskydning  $G$  forstaar man den Kraft

i kg, som, hvis Materialet var fuldstændig elastisk, vilde forskyde den ene Ende af en prismatisk Stang af Tværnsnit  $1 \text{ mm}^2$  et Stykke netop saa stort som Legemet's Længde i Forhold til den anden Ende. Paa Grund af Proportionaliteten mellem Paavirkning og Formforandring vil man, da de i Afstanden  $p$  fra  $T$  liggende Fiberelementer drejes et Stykke  $p\alpha$ , have

$$\frac{p\alpha}{L} = \frac{k_v}{G}, \text{ hvoraf } \frac{k_v}{p} = \frac{\alpha G}{L}.$$

Indsætter man denne Værdi af  $\frac{k_v}{p}$  i (41), faar man

$$M_v = \frac{\alpha G J_p}{L}, \quad (43)$$

men  $\alpha = \frac{\pi\delta}{180}$  vil, indsat i (43), give  $\frac{\pi\delta}{180} \cdot \frac{G J_p}{L} = M_v$ ,

$$\text{hvoraf } \delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_v L}{G J_p}. \quad (44)$$

Ved Aksler regner man, at Vridningsvinklen ikke bør være mere end  $0,25^\circ$  for hver Meters Længde.

Eksp. 95. Paa en Smedejærns Borestang med kvadratisk Tværnsnit, hvis Side er 32 mm, virke to Mænd hver med et Tryk af 16 kg paa en Arm af  $0,8 \text{ m}$  Længde.

Hvilken Paavirkning faa Stangens yderste Fibre?

Til Bestemmelse heraf maa man benytte Ligningen

$$M_v = s \cdot \frac{J_p}{p},$$

hvor  $s$  er ubekendt.  $M_v = 800 \cdot 2 \cdot 16$ ,  $J_p = \frac{1}{6} \cdot 32^4$  og  $p = \frac{32}{\sqrt{2}}$ , altsaa  $800 \cdot 32 = s \cdot \frac{1}{6} \cdot 32^3 \cdot \sqrt{2}$ , hvoraf  $s = 3,315 \text{ kg/mm}^2$ .

Eksp. 96. Hvor stor maa Kvadratsiden i den i Eksp.

95 omtalte Borestang være, naar man ønsker at byde Materialet i det højeste  $2,4 \text{ kg/mm}^2$ .

Kaldes Kvadratsiden  $x$ , har man

$$800 \cdot 32 = 2,4 \cdot \frac{1}{6} x^3 \sqrt{2}, \text{ hvoraf } x = 35,64 \text{ mm.}$$

Eksp. 97. En Cylinder af blødt Staal af Længde  $2 \text{ m}$  er indspændt i den ene Ende og paavirkes til Vridning ved en i den anden Ende anbragt Kraft paa  $300 \text{ kg}$ , som virker paa en Arm af Længde  $0,6 \text{ m}$ . Hvilken Diameter maa man give Cylindren, naar  $k_v = 2,4 \text{ kg/mm}^2$ ? Hvor stor bliver Vridningsvinklen?

$$G = 8000 \text{ kg/mm}^2, M_v = 300 \cdot 600 = 180000 \text{ kgmm.}$$

Ved Formel (41) faar man

$$180000 = 2,4 \cdot \frac{\pi}{16} d^3 = \frac{2,4}{5} d^3, \text{ hvoraf } d = 72,11 \text{ mm.}$$

Hvis man giver Cylindren en Diameter af  $73 \text{ mm}$ , bliver Vridningsvinklen

$$\delta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{180000 \cdot 2000 \cdot 32}{8000 \cdot 73^4 \cdot \pi} = \text{ca. } 0,925^\circ.$$

Paa en Længde af  $2 \text{ m}$  tillader man imidlertid kun en Snoning af  $0,5^\circ$ , og Diametren maa altsaa beregnes efter Stivhedshensynet.

Indsætter man  $\delta = 0,5$  i Ligning (44), faar man

$$0,5 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{180000 \cdot 2000}{8000 \cdot \frac{\pi}{32} d^4}; \quad d = 85,5 \text{ mm.}$$

Giver man Cylindren denne Diameter, ville de yderste Fibre faa en Paavirkning  $s$ , som findes af  $M_b = \frac{s}{p} \cdot J_p$ .

$$180000 = \frac{s \cdot 85,5^3}{5}, \text{ hvoraf } s = 1,446 \text{ kg/mm}^2.$$

## 6. *Sammensatte Paavirkninger.*

### a) *Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Forskydning.*

Naar en Konstruktionsdel paavirkes til Bøjning, vil den i de fleste Tværsnit samtidig paavirkes til Forskydning. Hertil er der under Afsnittet om Bøjning ikke taget noget Hensyn, fordi Forskydningen i Almindelighed ikke spiller nogen stor Rolle i Sammenligning med Bøjningen, blandt andet fordi den ofte er mindst for det Tværsnit, for hvilket Bøjningen er størst. Imidlertid er Forskydningen dog undertiden størst for det Tværsnit, med Hensyn til hvilket Bøjningsmomentet er størst, og i saa Fald kan der være nogen Grund til at tage Hensyn til den. Man kan gøre det paa den Maade, at man beregner, hvor stort et Areal der behøves til at modstaa Forskydningen, og dette Areal tænker man sig borte med Halvdelen paa hver Side af den neutrale Akse, eftersom Fibrene her kun i ringe Grad paavirkes til Bøjning. Derefter undersøger man, om den Del af Tværsnittet, som bliver tilbage, er tilstrækkelig stor til at modstaa Bøjningen. Dette skal blive nærmere oplyst ved et Eksempel, hvorved man tillige vil kunne faa et Indtryk af, hvilken Indflydelse det faar paa Tværsnittets Størrelse, om man tager Hensyn til Forskydningen eller ikke.

Eksp. 98. En Støbejernsdrager, der er indspændt i den ene Ende, har et fritliggende af 1 m og belastes af en jævntfordelt Vægt paa 1350 kg. Dragerens Tværsnit skal være et Rektangel, saaledes at Bredden af dette gennem hele Dragerens Længde er konstant, nemlig 70 mm, medens Højden varierer saaledes, at Tværsnittene netop yde tilstrækkelig Modstand mod de i dem virkende Spændinger.

Hvis man ikke tog Hensyn til Forskydningen, vilde Drageren blive et tresidet Prisme af den paa Fig. 118

viste Form. Tværsnittets Højde  $y$  ved Indspændingen vil i saa Fald, da Bøjningsmomentet med Hensyn hertil er  $\frac{1}{2} \cdot 1350 \cdot 1000 = 670000$  kgmm og  $k_s = 3$  kg/mm<sup>2</sup>, faas af Ligningen

$$670000 = 3 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{70y^3}{\frac{1}{2}y}; \quad y = 138,4 \text{ mm.}$$

Vil man tage Forskydningen, som vokser ganske jævnt fra 0 i den frie Ende indtil 1350 kg ved Indspændingen, med i Betragtning, maa man gaa frem paa følgende Maade:

Regner man  $k_f = 2,3$  kg/mm<sup>2</sup>, vil der til at modstaa Forskydningen fordres et Areal af Størrelse  $\frac{1350}{2,3}$  mm<sup>2</sup>. Det bliver et Rektangel, hvis Højde, da Bredden er 70 mm, vil blive

$$\frac{1350}{2,3 \cdot 70} = 8,4 \text{ mm.}$$

Giver man nu Dragerens Tværsnit ved Indspændingen en Højde af 140 mm i Stedet for 138,4 mm, og tænkes det Rektangel, som skal modstaa Forskydningen, borttaget ved den neutrale Akse, vil Resten af Tværsnittet, som altsaa skal modstaa Bøjningen, blive det paa Fig. 132 skraverede Areal. Da  $M_b = 670000$  kgmm og  $k_s = 3$  kg/mm<sup>2</sup>, vil

$$\frac{M_b}{k_s} = 223333 \text{ mm}^3.$$

For det skraverede Areal skal  $\frac{J}{y}$  i det mindste have denne Værdi.  $J = \frac{1}{12} \cdot 70 (140^3 - 8,4^3) = 18000000$  mm<sup>4</sup>;

$$y = 70 \text{ mm}; \quad \text{altsaa} \quad \frac{J}{y} = 228600 \text{ mm}^3.$$

Tværsnittet bliver saaledes stærkt nok, uagtet Højden kun er forøget med 1,6 mm.

Hvor Forskydning forekommer samtidig med andre Paavirkninger, kan man bære sig ad paa lignende Maade og altsaa tænke sig et saa stort Areal af Tværsnittet

borte ved den neutrale Akse eller omkring Tyngdepunktet, som vil behøves til at modstaa Forskydningen.

b) *Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Vridning.*

Man finder i saa Fald først, som angivet Side 68, det ideelle Bøjningsmoment

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_v^2},$$

og man beregner dernæst Konstruktionsdelen for Bøjning alene, idet man benytter Ligningerne (32) eller (33), hvor  $M_i$  træder i Stedet for  $M_b$ . Man vil i dette Tilfælde komme til at regne med en Sikkerhed, som svarer til den, man vilde opnaa, naar man for Vridning benyttede  $k_f$ .

Vil man derimod for det cirkulære Tværsnit regne med en Sikkerhed, som svarer til den, der opnaas ved Benyttelse af  $k_v$ , maa man sætte

$$M_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + (\alpha M_v)^2},$$

hvor  $\alpha$  er en Koefficient, som angiver Forholdet mellem den for Materialet fastsatte tilladelige Paavirkning for Bøjning og  $\frac{5}{4}$  af den tilladelige Paavirkning  $k_v$  for Vridning.

c) *Tværsnittet paavirkes til Bøjning og samtidig enten til Sammentrykning eller til Strækning.*

Paa et Tværsnit, hvis Areal betegnes ved  $A$ , og hvis Inertimoment er  $J$ , antages der at virke et Bøjningsmoment  $M_b$ , medens Tværsnittet tillige paavirkes af en sammentrykkende Kraft  $T$ . Denne sidste vil paa hver af

Tværsnittets Arealenheder udøve et Tryk  $\frac{T}{A}$ . Paa Grund

af Bøjningen ville de yderste Fiberelementer i Tværsnittet paa Legemets konvekse Side modtage en Paavirkning til Strækning, som ifølge Afsnittet om Bøjning vil være

$\frac{M_b \cdot y_s}{J}$ , hvor  $y_s$  betegner Afstanden fra den neutrale Akse

til de stærkest strakte Fibre. Da den paa disse Fiberelementer virkende strækkende Paavirkning  $\frac{M_b \cdot y_s}{J}$  mod-

virkes af Trykket  $\frac{T}{A}$ , vil den samlede Paavirkning, som de

faa til Strækning, være  $\frac{M_b \cdot y_s}{J} - \frac{T}{A}$ . Denne Størrelse

maa være mindre eller i det højeste lig med den tilladelige Paavirkning for Strækning  $k_s$ . Sættes de to Størrelser ligestore, faar man

$$\frac{M_b \cdot y_s}{J} - \frac{T}{A} = k_s, \text{ hvoraf } M_b = \left(k_s + \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_s}. \quad (45)$$

De yderste Fiberelementer paa Legemets konkave Side ville foruden Trykket  $\frac{T}{A}$  tillige paa Grund af Bøjningen

modtage et Tryk  $\frac{M_b \cdot y_t}{J}$ , hvor  $y_t$  er Afstanden fra den neutrale Akse til de stærkest trykkede Fibre. Det samlede Tryk paa disse Fiberelementer bliver altsaa

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} + \frac{T}{A},$$

som i det højeste maa være lig med den tilladelige Paavirkning  $k_t$  for Sammentrykning. For denne Grænseværdi faar man altsaa

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} + \frac{T}{A} = k_t, \text{ hvoraf } M_b = \left(k_t - \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_t}. \quad (46)$$

Til Dimensionsbestemmelsen maa man benytte den af de to Formler (45) og (46), som i vedkommende Tilfælde giver den største Værdi.

Paavirkes et Tværsnit foruden til Bøjning tillige til Strækning af en Kraft  $S$ , faar man i de yderste Fiberelementer paa den konvekse Side dels en Paavirkning  $\frac{S}{A}$

til Strækning hidrørende fra  $S$ , dels en Paavirkning  $\frac{M_b \cdot y_s}{J}$  ligeledes til Strækning og hidrørende fra Bøjningsmomentet  $M_b$ . Sættes den samlede Paavirkning til Strækning lig med  $k_s$ , faar man

$$\frac{M_b \cdot y_s}{J} + \frac{S}{A} = k_s, \text{ hvoraf } M_b = \left(k_s - \frac{S}{A}\right) \frac{J}{y_s}. \quad (47)$$

De yderste Fiberelementer paa Legemets konkave Side ville paavirkes til Sammentrykning af ialt

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} - \frac{S}{A}$$

Sættes denne Størrelse lig med  $k_t$ , faar man

$$\frac{M_b \cdot y_t}{J} - \frac{S}{A} = k_t, \text{ hvoraf } M_b = \left(k_t + \frac{S}{A}\right) \frac{J}{y_t}. \quad (48)$$

Her maa man ved Dimensionsbestemmelsen benytte den af Formlerne (47) og (48), som giver den største Værdi.

Ekspl. 99. Paa den i Ekspl. 42 (se Side 78) omtalte armerede Bjælke virker der i  $B$  2400 kg og i  $C$  1800 kg, begge lodret nedad. Disse Tryk forudsættes at hidrøre dels fra en over hele Bjælken  $AD$  jævnfordelt Belastning af 5400 kg, dels fra et enkelt Tryk af 600 kg i  $B$ .

Betragtes Stykket  $BC$ , ser man, at dette dels vil paavirkes til Sammentrykning af 7400 kg og dels til Bøjning af en Belastning paa 1800 kg jævnfordelt over Bjælkens fritliggende, der er 3 m.

Da Belastningen er jævnfordelt, findes det farligste Tværsnit i Bjælkens Midte. Bøjningsmomentet med Hensyn til dette Tværsnits Tyngdepunkt bliver  $M_b = \frac{1}{8} \cdot 1800 \cdot 3000 = 675000$  kgmm. Skal Bjælken være af Egetræ, hvor  $k_s = 1,2$  kg/mm<sup>2</sup> og  $k_t = 0,80$  kg/mm<sup>2</sup>, vil man for de stærkest strakte Fibres Vedkommende ifølge (45) faa

$$675000 = \left(1,2 + \frac{7400}{x^2}\right) \frac{1}{8} x^3,$$

og for/de stærkest trykkede Fibre ifølge (46)

$$675000 = \left(0,80 - \frac{7400}{x^2}\right) \frac{1}{8} x^3.$$

Den sidste af disse Ligninger vil give størst Værdi for  $x$  og maa altsaa benyttes. Den kan omformes til

$$4050000 = 0,80 x^3 - 7400 x, \text{ eller} \\ 5062500 = x^3 - 9250 x.$$

Ved at prøve sig frem, finder man  $x = 190$  mm.

Ekspl. 100. Det midterste Stykke af den Bjælke, som indgaar i det paa Fig. 67 viste Hængeværk, har et fritliggende af 2,5 m og paavirkes af en jævnfordelt Belastning paa 2000 kg, medens det samtidig paavirkes til Strækning af en Kraft paa 5400 kg. Antager man, at Bjælken skal tildannes af Fyrretømmer med kvadratisk Tværsnit, vil man, da  $k_s = 0,9$  kg/mm<sup>2</sup> og  $k_t = 0,63$  kg/mm<sup>2</sup>, ifølge (47) for de stærkest strakte Fibre faa

$$\frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 2500 = \left(0,9 - \frac{5400}{x^2}\right) \frac{1}{8} x^3,$$

og ifølge (48) for de stærkest trykkede Fibre

$$\frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 2500 = \left(0,63 + \frac{5400}{x^2}\right) \frac{1}{8} x^3,$$

hvor  $x$  angiver den søgte Kvadratside. Disse Ligninger kunne omformes til henholdsvis

$$4167000 = x^3 - 6000 x \text{ og } 5940000 = x^3 + 8572 x.$$

Den første af Ligningerne giver størst Værdi for  $x$ , nemlig 173.  $x$  kan altsaa af Hensyn til Styrken passende sættes til 175 mm.

Ekspl. 101. Det paa Fig. 76 viste Spærfag  $ACE$  paa-

virkes lodret nedad af en jævnfordelt Belastning paa 8000 kg. Derved vil Stykket  $AB$  sammentrykkes af 6400 kg, som er Summen af den paa  $AC$  jævnfordelte Belastnings Komposanter efter Spærets Længde. Dens Komposanter vinkelret paa Spæret ville desuden paavirke  $AB$  til Bøjning med en jævnfordelt Belastning, som er  $2000 \cos v$ , naar  $v$  er Spærets Vinkel med en vandret Linie.

For Midten af  $AB$ , hvor det farligste Tværsnit findes, er  $M_b = \frac{1}{8} \cdot 2000 AB \cos v = \frac{1}{8} \cdot 2000 \cdot 2250 = 562500$  kgmm.

Spæret tænkes dannet af et valset  $\Gamma$ . Regnes  $k_s = k_t = 9$  kg/mm<sup>2</sup>, vil Profil Nr.  $12/12$  for de stærkest sammentrykkede og de stærkest strakte Fibre give henholdsvis

$$\left(k_t - \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_t} = \left(9 - \frac{6400}{2960}\right) \cdot \frac{3660000}{32,8} = 763200 \text{ kgmm og}$$

$$\left(k_s + \frac{T}{A}\right) \frac{J}{y_s} = \left(9 + \frac{6400}{2960}\right) \cdot \frac{3660000}{87,2} = 468500 \text{ kgmm.}$$

Forsaavidt vedkommende Jærnbjælke skulde kunne benyttes, maatte begge disse Størrelser være større end  $M_b = 562500$  kgmm. Den sidste af dem er imidlertid mindre, og man maa derfor forsøge, om det følgende Nr., nemlig  $14/14$ , er stærkt nok.

Anvendes dette, hvis Inertimoment er 6600000 og hvis Areal er 3990 mm<sup>2</sup>, medens Afstanden til de stærkest strakte Fibre er 102 mm, vil man af Ligning (45), ved at løse den med Hensyn til  $k_s$ , kunne finde den Paavirkning, som de stærkest strakte Fibre faa. Den bliver 7,09 kg/mm<sup>2</sup>, medens de stærkest sammentrykkede Fibre, idet  $y_t$  er 38 mm, ville faa en Paavirkning af kun 4,84 kg/mm<sup>2</sup>. Denne Jærnbjælke er altsaa tilstrækkelig stærk, men da Paavirkningerne ere langt mindre end den tilladelige Paavirkning af 9 kg/mm<sup>2</sup>, kunde der være god Anledning til slet ikke at benytte en Jærnbjælke af  $\Gamma$ -Form, men derimod f. Eks. to indbyrdes forbundne Vinkeljærn.

Virker der paa et Tværsnit Vridning i Forbindelse med en eller flere af de andre Paavirkninger, kan man omforme Vridningsmomentet til et ideelt Bøjningsmoment og derefter benytte det foran udviklede.

### III. Stenkonstruktioner.

Stenkonstruktioner henhøre under de saakaldte løse Systemer, fordi deres enkelte Dele tænkes liggende løse paa hverandre uden Forbindelse. De forekommer dels som Hvælvinger, dels som Mure. I Bygningskonstruktionslæren ere disse Konstruktioner nærmere omtalte, og man skal derfor her kun give en Fremstilling af, hvorledes Tværsnitsdimensionerne af en foreliggende Stenkonstruktion kan bestemmes under Forudsætning af, at den skal være i Stand til at modstaa givne ydre Paavirkninger. Fremgangsmaaden vil, hvad enten der er Tale om en Hvælving eller en Mur, i alt væsentligt være den samme, da en Mur kan betragtes som en Del af en Hvælving, hvis Radius er uendelig stor. Naar man derfor under den mere almindelige Udvikling taler om Hvælvinger, tænkes Mure medindbefattede herunder; hvad der specielt er at sige om Mure, vil nærmere fremgaa af Eksemplerne i det følgende.

De Belastninger, som virke paa saadanne Konstruktioner, bestaa ligesom ved Tagværker og Broer dels i en stadig og dels i en tilfældig Belastning. Den førstnævnte, der er Murværk, Jord o. l., skyldes dels Konstruktionens Egenvægt, dels Materialer, som trykke paa den. Den tilfældige Belastning er forskellig efter Konstruktionens Anvendelse, og kan saaledes være en Menneskemængde, al-

mindelige Vogne, Jærnbanevogne m. m. Ofte tænker man sig den samlede Belastning omsat i Murværk, da dette i mange Tilfælde vil lette Beregningerne. Da de enkelte Dele af Stenkonstruktionerne i Almindelighed forudsættes at ligge løse paa hverandre, tør man ikke udsætte nogen Del af dem for Træk, men alene for Tryk. En Undtagelse heri gør man dog undertiden, naar Cementmørtel anvendes som Bindemiddel, da dette Materiale kan taale en ringe Paavirkning til Strækning.

Da den lige cylindriske Tøndehvælvning er den simpleste af de eksisterende Hvælvingsarter, skal den lægges til Grund for den følgende Udvikling. En saadan Tøndehvælvning finder sin Understøtning i Vederlagene, og den er begrænset af en ydre og en indre Hvælvflade. Lægges et Plan igennem Hvælvingen vinkelret paa dennes Akse, ville Hvælvfladerne skæres i de saakaldte Hvælvlinier og Vederlagene i Fødselslinierne. Hvælvingen vil være tilstrækkelig stærk, naar Paavirkningen paa en hvilken som helst Liggeflade har en saadan Størrelse, Retning og Beliggenhed, at der

- 1) ingen Knusning af Materialet finder Sted, hverken ved den indre eller den ydre Hvælvkant (de Linier, hvori Liggefladen skærer Hvælvfladerne),
- 2) ikke finder nogen Glidning Sted, hverken indad eller udad,
- 3) ikke finder Væltning Sted, hverken indefter om den indre Hvælvkant eller udefter om den ydre.

Ved Undersøgelse af Hvælvninger (Mure) betragtes altid et Stykke af dem, som afskæres imellem to Planer, der i en Afstand af 1 Meter fra hinanden lægges vinkelret paa Hvælvningens Akse.

Alle de Tryk, som hidrørende fra den ydre Belastning komme til at virke paa Hvælvningens Liggeflader, ville ind-

gaa i den saakaldte Middeltryklinie, der allerede kortelig er omtalt Side 59—60. Den er som nævnt en Stangpolygon, konstrueret for en af Kraftpolygonens Vinkelspidser som Pol; det i enhver af dens Sider virkende Tryk vil være Resultanten af alle de Kræfter, som virke til den ene Side af vedkommende Stangpolygonside. Imidlertid vil man, eftersom Udgangspunkterne for Middeltryklinien ved Toppen og ved Vederlaget vælges paa forskellige Steder, faa Middeltryklinien, som baade i Form og Beliggenhed blive forskellige. Kan man i en Hvælvning indlægge flere Middeltryklinien, hvis enkelte Kræfter alle opfylde de foran nævnte tre Betingelser, har Hvælvningen overflødig Styrke og altsaa ogsaa overflødig Materiale. Naar der i Hvælvningen kun indgaar det absolut nødvendige Materiale, kan der i Hvælvningstværsnittet kun indlægges een Middeltryklinie, som opfylder de tre angivne Betingelser, og denne Middeltryklinie vil da indeholde Tyngdepunkterne i alle Liggeflader. Et saa gunstigt Forhold vil kun indtræde, naar Hvælvningen formes efter Middeltryklinien. Dette gør man dog saa at sige aldrig i Praksis, men man gaar ud fra en bestemt Hvælvingsform, og Middeltryklinien vil saa nogle Steder nærme sig til den indre og andre Steder til den ydre Hvælvlinie. Man indskrænker sig da til at finde en Middeltryklinie, som ligger saaledes, at der i en enkelt eller i et Par Liggeflader netop vil være tilstrækkeligt Materiale til Stede til at modstaa Paavirkningerne, medens der i de øvrige Liggeflader findes overflødig Materiale. Fremgangsmaaden ved Bestemmelsen af Hvælvninger vil derfor blive den, at man vælger en Hvælvingsform samt fastslaar Hvælvningens Tykkelse paa de forskellige Steder og derefter undersøger, om Hvælvningen kan modstaa Paavirkningerne. Viser den sig enten for svag eller for stærk, maa dens Tykkelse forandres og Undersøgelsen gentages. Forinden dette imidlertid oplyses

nærmere, skulle de foran nævnte tre Betingelser omtales noget mere indgaaende.

Betingelse 1. *Der maa ingen Knusning af Materialet finde Sted.*

Fig 133<sup>a</sup> og <sup>b</sup> forestille henholdsvis lodret og vandret Billede af et Snit i en Stenkonstruktion. Snittets Tyngdepunkt er betegnet ved  $T$ , og det Punkt, i hvilket den ydre Kraft  $P$  angriber, ved  $B$ . Fremdeles betegnes Afstanden  $BT$  ved  $a$ , Snittets Areal ved  $A$  og dets Inertimoment med Hensyn til Aksen  $XX$ , der er lagt gennem Tyngdepunktet vinkelret paa  $BT$ , ved  $J$ , medens Afstanden mellem  $XX$  og de yderste Arealelementer til højre og venstre kaldes henholdsvis  $y$  og  $y'$ . I Punktet  $T$  kan man, uden at dette vil faa nogen Indflydelse paa Ligevægten, tilføje to Kræfter af Størrelse  $P$ , den ene virkende lodret opad, den anden lodret nedad. Den første af disse vil i Forbindelse med  $P$ , som virker i  $B$ , danne et Kraftpar med Moment  $Pa$ , og den ydre Krafts Virkning paa Snittet bestaar altsaa i et Moment  $Pa$  og en enkelt Kraft  $P$  virkende i Tyngdepunktet. Denne sidste vil fordele sig jævnt over hele Arealet, saa at der altsaa paa hver Arealenhed kommer et Tryk  $\frac{P}{A}$ . Momentet  $Pa$  vil ifølge Afsnittet om

Bøjning bevirke, at de yderste Arealelementer til højre ville faa et Tryk, som er  $\frac{Pa y}{J}$ , og de yderste Elementer til venstre et Træk af Størrelsen  $\frac{Pa y'}{J}$ .

Den samlede Virkning vil saaledes paa de yderste Arealelementer til venstre blive  $\frac{P}{A} - \frac{Pa y'}{J}$ , og paa de yderst til højre liggende  $\frac{P}{A} + \frac{Pa y}{J}$ .

De sidste blive altid paavirkede til Sammentrykning,

medens de første ville paavirkes til Strækning eller til Sammentrykning, eftersom

$$\frac{P}{A} - \frac{Pa y'}{J} < 0,$$

$$\text{Er } \frac{P}{A} - \frac{Pa y'}{J} = 0, \quad (49)$$

blive de yderst til venstre liggende Fibre upaavirkede.

Anvendes dette paa en Liggeflade, hvis Figur er et Rektangel, se Fig. 134<sup>a</sup> og <sup>b</sup>, faar man ifølge (49)

$$\frac{P}{bh} - \frac{Pa \cdot \frac{1}{2}h}{\frac{1}{12}bh^3} = 0, \text{ hvoraf } a = \frac{1}{6}h.$$

Trykket maa altsaa ikke komme den indre eller ydre Hvælvkant nærmere end  $\frac{1}{6}$  af Hvælvingens Tykkelse, hvis Strækning af Materialet skal undgaaes.

I dette Tilfælde, altsaa naar  $a = \frac{1}{6}h$ , bliver Størrelsen

$$\frac{P}{A} + \frac{Pa y}{J},$$

som angiver Paavirkningen i de stærkest sammentrykkede Arealelementer, til

$$t = \frac{P}{bh} + \frac{P \cdot \frac{1}{6}h \cdot \frac{1}{2}h}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{2P}{bh},$$

o: netop dobbelt saa stor, som den vilde blive, naar  $P$  angreb i Tyngdepunktet. Selv om Materialet ikke tør forudsættes at kunne taale Træk, tillader man dog, at Trykket virker nærmere ved en Hvælvkant end  $\frac{1}{6}$  af Hvælvingens Tykkelse, naar blot ikke den tilladelige Paavirkning pr. Arealenhed til Sammentrykning overskrides, idet man i saa Fald forudsætter, at de yderste Fibre paa den modsatte Side ikke yde nogen Modstand.

Paa Fig. 135<sup>a</sup> og <sup>b</sup> er  $P$  vist angribende i et Punkt  $C$ , der ligger i en Afstand  $c < \frac{1}{6}h$  fra den ene Kant. Forholdet vil da være det samme, som om Rektanglet af



Bredde  $b$  kun havde en Højde  $3c$ , idet den Del af dets Areal, som ligger til venstre for den punkterede Linie, vil blive uvirksomt. Paa de stærkest paavirkede Elementer vil der saaledes komme et Tryk  $\frac{2P}{3bc}$ .

Ifølge det foregaaende maa man altsaa til Bestemmelse af Paavirkningen  $t$  pr. Arealenhed af de stærkest sammentrykkede Partikler, naar  $P$  angriber i Afstanden  $\frac{1}{3}h$  fra en af Hvælvkanterne, benytte

$$t = \frac{2P}{bh}. \quad (50)$$

Er Afstanden fra  $P$ 's Angrebepunkt til Hvælvkanterne  $> \frac{1}{3}h$ , maa man benytte

$$t = \frac{P}{A} + \frac{P ay}{J} = \frac{P}{bh} \left( 1 + \frac{6a}{h} \right). \quad (51)$$

Et specielt Tilfælde heraf er det, hvor  $P$ 's Angrebepunkt falder i Arealets Tyngdepunkt  $T$ . I saa Fald er

$$t = \frac{P}{bh}. \quad (52)$$

Er Afstanden fra  $P$ 's Angrebepunkt til en af Hvælvkanterne  $< \frac{1}{3}h$ , benyttes Formlen

$$t = \frac{2P}{3bc}. \quad (53)$$

Værdien for  $t$  maa i intet Tilfælde overskride Værdien for den tilladelige Paavirkning  $k_t$  for vedkommende Materiale.

Betingelse 2. *Der maa ikke finde nogen Glidning Sted.*

$AB$  paa Fig. 136 forestiller en plan Flade af et Legeme, paa hvilken der ligger et andet Legeme  $L$ . Gennem dets Tyngdepunkt antages der at virke en Kraft  $P$  ind imod Planet, saaledes at Kraften danner en Vinkel  $v$  med den vinkelrette paa Planet. Opløser man nu  $P$  efter to Linier gennem Tyngdepunktet, den ene

parallel med  $AB$ , den anden vinkelret derpaa, vil den første, hvis Størrelse er  $P \sin v$ , søge at bevæge  $L$  henad  $AB$ , medens derimod den lodrette Komposant  $P \cos v$  vil trykke  $L$  ind imod  $AB$  og derved mellem de hinanden berørende Flader frembringe en Gnidningsmodstand (Frikationsmodstand), der vil modvirke  $L$ 's Bevægelse henad  $AB$ .

Størrelsen af denne Gnidningsmodstand er, som bekendt fra Fysikken, proportional med det paa de berørende Flader vinkelrette Tryk, idet den er Produktet af dette Tryk og den saakaldte Gnidningskoefficient (Frikationskoefficient)  $f$ , hvis Størrelse afhænger af de Materialer, hvoraf de to Legemer bestaa, og af de berørende Fladers Beskaffenhed. Gnidningsmodstanden vil altsaa i det paa Fig. 136 viste Tilfælde være  $f \cdot P \cos v$ . Naar  $f \cdot P \cos v > P \sin v$  eller, hvad der er det samme, naar  $f > \operatorname{tg} v$ , vil det ene Legeme ikke glide paa det andet, men er  $f \cdot P \cos v < P \sin v$  eller  $f < \operatorname{tg} v$ , vil Glidning finde Sted.

Den mindste Vinkel, som  $P$  kan danne med Perpendikulæren, naar Glidning skal kunne finde Sted, vil altsaa, naar denne Værdi af  $v$  betegnes ved  $g$ , være bestemt ved

$$f P \cos g = P \sin g, \text{ hvoraf } f = \operatorname{tg} g.$$

$g$  kaldes Gnidningsvinklen. Det er netop den Vinkel, som den plane Overflade af et Legeme, bestaaende af det ene Materiale, vil danne med det vandrette Plan i det Øjeblik, da et paa det liggende Legeme, dannet af det andet Materiale, vil begynde at glide nedad Fladen. Glidningen vil altsaa kun finde Sted, naar  $v \geq g$ .

Alle de Linier, som gennem Kraftens Angrebepunkt kunne anbringes saaledes, at de danne Vinklen  $g$  med den vinkelrette paa de berørende Flader, ville være Frembringere i den saakaldte Gnidningskegleflade (Frikationskegleflade).

Gnidningskoefficienten  $f$  vil ved almindelig Murværk med Kalkmørtel ligge mellem  $0,6$  og  $0,75$ , hvortil svarer

$g = 31^{\circ}$  à  $37^{\circ}$ . Ved ganske frisk Mørtel kan Værdien for  $f$  synke ned til  $0,51$ , i hvilket Tilfælde  $g = \text{ca. } 27^{\circ}$ . En Undersøgelse om, hvorvidt Betingelse 2 er opfyldt, bør altid finde Sted, med mindre Murværket, som f. Eks. Beton danner en aldeles fast Masse.

Betingelse 3. *Der maa ikke finde Væltning Sted om nogen Hvelokant.*

Saalænge Trykkets Angrebspunkt paa Liggefladen falder indenfor dennes Omkreds og samtidig Betingelse 1 er opfyldt, vil der aldrig være Fare for Væltning.

Hvad Hvelvingsformen angaar, afhænger denne ofte af særlige Förhold. Er dette ikke Tilfældet, skal man med Hensyn til Valget af en heldig Form bemærke følgende: Er Belastningen foroven begrænset af et vandret Plan, hvis Højde over Toppen er  $\frac{1}{3}$  à  $\frac{1}{6}$  af Vidden af den Aabning, som skal overhvelves, vil en flad Cirkelbue med Radius fra 3 til 5 Gange Belastningshøjden over Toppunktet være passende. Skal Hvelvingen ikke bære andet end sig selv, vil en Cirkelbue med i det mindste  $\frac{2}{3}$  af Spændvidden til Radius give en heldig Hvelvingsform. Medens Valget af disse Hvelvingsformer under de nævnte Belastningsforudsætninger saaledes vil medføre, at der kommer til at indgaa det mindst mulige Materiale i Hvelvingen, ville de være mindre heldige for Hvelvingsens Piller, som blive udsatte for store Sidetryk, der oven i Købet danne smaa Vinkler med den vandrette Linie. For Pillernes Vedkommende er blandt Cirkelbuer, foruden Spidsbuen, Halvcirklen den heldigste, men den sidste vil, naar Belastningen foroven er vandret begrænset, være mindre gunstig for Hvelvingsens Tykkelse, og dertil kommer, at den ofte vil fordre en større Højde, end der kan skaffes til Veje. Hvor det er nødvendigt at benytte en Bue med lille Pil, anvendes derfor jævnlig med Held

den saakaldte Kurvehanksbue, som bestaar af flere Cirkelbuer med forskellige Centrere og som for Pillernes Vedkommende er gunstigere end den flade Cirkelbue.

Naar saavel Hvelvingen som dens Belastning ere symmetriske med Hensyn til et lodret Plan gennem Hvelvingsens Akse, ville de to Halvdele, hvori dette lodrette Plan deler Hvelvingen, udøve lige store vandrette Tryk imod hinanden i Toppen, og man kan derfor i saa Fald ved Bestemmelsen af Hvelvingestykkerne nøjes med at betragte den ene Halvdel af Hvelvingen. Paa denne vil der altsaa i Toppen virke en Modstand, hvis Retning man kender, men hvis Størrelse og Angrebspunkt ere ubekendte. Til at forhindre Hvelvingshalvdelen i at falde, vil der desuden virke en Modstand i Vederlaget, men saavel dennes Angrebspunkt som Størrelse og Retning ere ogsaa ubekendte. Middeltrykliniens Form og Belliggenhed er saaledes ganske ubestemt. Den vil afhænge dels af Valget af Angrebepunkterne i Toppen og i Fødselslinien dels af Hvelvingsens Form og Belastningsforhold. Som en mere almindelig Regel, hvorfra der dog jævnlig finder Afgivelser Sted, kan man angive, at Middeltryklinien ved Cirkelbuer, naar Belastningen er begrænset foroven af et vandret Plan, falder nærmest ydre Hvelvlinie ved Toppen og Fødselslinierne, derimod nærmest den indre Hvelvlinie noget fra Fødselslinierne. Spidsbuer have som oftest Middeltryklinien nærmest indre Hvelvlinie ved Toppen og Fødselslinierne, men nærmest ydre Hvelvlinie noget fra Toppen. Da Opgaven er saa yderst ubestemt, vil det altid være nødvendigt at foretage en foreløbig Beregning til Bestemmelse af Hvelvingsens Tykkelse paa de forskellige Steder. Selv om de Tykkelser, man saaledes finder, ikke ved en mere nøjagtig Undersøgelse vise sig

ganske rigtige, vil man dog meget snart, ved at ændre lidt paa dem, komme til et tilfredsstillende Resultat.

Ekspl. 102. Paa Fig. 137<sup>a</sup> og <sup>b</sup> er der vist en saadan foreløbig Bestemmelse og paa Fig. 138<sup>a</sup> og <sup>b</sup> den dertil hørende endelige Undersøgelse af en cylindrisk Tøndehvælvning, hvis indre Hvælvflade til Ledelinie har en Cirkelbue med Korde 7,5 m og Pil 1,25 m. Saavel Hvælvningen som dens Belastning antages at være Murværk, der foroven er begrænset af et vandret Plan i Afstanden 1 m fra den indre Hvælvlinies Top.

Paa Figur 137<sup>a</sup> er den indre Hvælvlinie delt i seks lige-store Dele. Antallet af disse Dele er vilkaarligt, men Bestemmelsen vil selvfølgelig blive desto nøjagtigere, jo flere Dele Hvælvlinien deles i. Arealet  $abcd$ , der, som proportionalt med hele Belastningen, kan træde i Stedet for denne ved den grafiske Konstruktion, er dernæst ved lodrette Linier delt i seks Dele, som tilnærmelsesvis ere Trapezer.

$$abef = 1,1320 \text{ m}^2 = P_1,$$

$$fegh = 1,0350 \text{ m}^2 = P_2,$$

$$hgik = 0,9070 \text{ m}^2 = P_3,$$

$$kilm = 0,7980 \text{ m}^2 = P_4,$$

$$mlno = 0,7200 \text{ m}^2 = P_5,$$

$$oncd = 0,6900 \text{ m}^2 = P_6,$$

$$\text{altsaa er } abcd = 5,2820 \text{ m}^2 = R.$$

Efterat disse Trapezers Tyngdepunkter ere bestemte ad grafisk Vej, tænker man sig deres Arealer, som ere betegnede ved  $P_1, P_2, P_3 \dots$ , virkende i Tyngdepunkterne som Kræfter lodret nedad. Beliggenheden af deres Resultant er bestemt paa sædvanlig Maade ved paa Figur 137<sup>b</sup> at afsætte Kræfterne ved Siden af hverandre i en lodret Linie, vælge en vilkaarlig Pol  $O'$ , fra denne trække

Straaler til Kraftpolygonens Vinkelspidser og ved endelig paa Fig. 137<sup>a</sup> at danne den til disse Straaler svarende Stangpolygon  $I' II' III' \dots VI' VII'$ . Resultantlinien  $R$  og Modstandslinierne ved Toppen og ved Fødselslinien skulle skære hverandre i eet Punkt, for at der kan være Ligevægt mellem de ydre Kræfter. Man vælger da først efter bedste Skøn et vilkaarligt Punkt  $A$  i Toppen til Angrebspunkt for den vandrette Modstandslinie, forlænger denne, som er betegnet ved  $P_7$ , til Skæring med  $R$  i Punktet  $B$  og trækker endelig gennem  $B$  og et ligeledes paa Skøn tæt ved Fødselslinien valgt Punkt  $C$  den anden Modstandslinie  $P_8$ . Skulde man komme til at vælge de omtalte Endepunkter for Middeltryklinien noget uheldigt, saaledes at denne f. Eks. for en Del faldt udenfor den indre Hvælvlinie, gør dette ikke noget, da det her væsentligst kommer an paa at faa et Skøn over Middeltrykliens omtrentlige Form samt en tilnærmelsesvis Bestemmelse af Modstandene i Toppen og Vederlaget. Størrelsen af disse to Modstande  $P_7$  og  $P_8$  ere fundne paa Figur 137<sup>b</sup> ved Linier fra Endepunkterne af  $R$  parallelle med Modstandslinierne  $P_7$  og  $P_8$  paa Fig. 137<sup>a</sup>. Vælger man nu Vinkelspidsen  $O$  i den paa Fig. 137<sup>b</sup> af  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$  og  $P_8$  dannede Kraftpolygon til Pol, og trækkes der Straaler herfra til Polygonens Vinkelspidser, ser man, at Kraften  $P_{13}$  er Resultant af  $P_6$  og  $P_7$ ,  $P_{12}$  Resultant af  $P_5, P_6$  og  $P_7$  o. s. v.; den ved Linier parallelle med disse Polstraaler dannede Stangpolygon vil altsaa blive en Middeltryklinie, hvis Vinkelspidser ere angivne paa Fig. 137<sup>a</sup> ved  $I, II, III$  o. s. v. Da den her fundne Middeltryklinie næsten har ganske samme Form som den indre Hvælvlinie, kan man i dette Tilfælde gaa ud fra, at Angrebspunkterne for  $P_7$  og  $P_8$  passende kunne vælges midt imellem den indre og ydre Hvælvlinie. Betragter man nu et Stykke af Hvælvningen og dens Belastning, som er 1 m langt i Retning vinkel-

ret paa Tegneplanet, vil der, idet  $P_7 = 7,74 \text{ m}^2$ , i  $A$  virke et Tryk  $T_7 = 7,74 \cdot 1600 = 12400 \text{ kg}$ , naar  $1 \text{ m}^3$  Murværk antages at veje  $1600 \text{ kg}$ .

Det er ikke ganske rigtigt, naar man til Bestemmelse af Trykkene paa de enkelte Liggeflader benytter  $P_7, P_8, P_9$  o. s. v. i Stedet for disses Komposanter vinkelret paa Liggefladen, men da Kræfternes Retninger gerne kun afvige meget lidt fra de vinkelrette, ser man i Almindelighed bort fra denne Unøjagtighed og bruger Kræfterne selv, da det simplificerer Fremgangsmaaden en hel Del, og man tilmed derved bestandig holder sig paa den sikre Side.

Ved Benyttelse af (52) findes Hvælvingens Tykkelse i Toppen ved Hjælp af Ligningen  $\frac{12400}{1000 \cdot h} = 0,06$ , idet Murværket forudsættes at kunne taale et Tryk af  $0,06 \text{ kg/mm}^2$ .  $h$  bliver derved lig med ca.  $200 \text{ mm}$ . Da  $P_8 = 9,3 \text{ m}^2$ , bliver Trykket  $T_8$  ved Fødselslinien

$$T_8 = 9,3 \cdot 1600 = \text{ca. } 14900 \text{ kg},$$

og Hvælvingens Tykkelse her

$$h_1 = \frac{14900}{0,06 \cdot 1000} = \text{ca. } 250 \text{ mm}.$$

Man vil altsaa passende kunne gøre Hvælvingen  $230 \text{ mm}$  eller  $1 \text{ Sten}$  tyk ved Toppen og  $350 \text{ mm}$  eller  $1\frac{1}{2} \text{ Sten}$  ved Vederlaget.

Paa Fig. 138<sup>a</sup> er Hvælvingen vist med disse Tykkelser. Den ydre Hvælvlinie, der er punkteret, er en Cirkelbue med vandret Tangent i Toppen. Ved den endelige Undersøgelse, hvor hele Belastningen er repræsenteret ved Arealet af Figuren  $abefiknqv$ , er den indre Hvælvlinie ligeledes delt i seks ligestore Dele, men gennem Delingspunkterne er der her trukket Radier, indtil de skære

den ydre Hvælvlinie, og gennem deres Skæringspunkter med den er der tegnet lodrette Linier. Hele Arealet deles derved i tolv Firkanter, hvoraf de seks kunne betragtes som Trapezer.

Disse Firkanters Arealer ere:

$$\begin{aligned} abcd &= 1,0620 \text{ m}^2; befc = 0,2315 \text{ m}^2; abefcd = 1,9235 \text{ m}^2 = P_1, \\ degh &= 0,8925 \text{ m}^2; cfig = 0,2135 \text{ m}^2; defigh = 1,1060 \text{ m}^2 = P_2, \\ hglm &= 0,7450 \text{ m}^2; gikl = 0,1960 \text{ m}^2; hgiklm = 0,9410 \text{ m}^2 = P_3, \\ mlop &= 0,6225 \text{ m}^2; lkno = 0,1870 \text{ m}^2; mlknop = 0,8095 \text{ m}^2 = P_4, \\ pors &= 0,5440 \text{ m}^2; onqr = 0,1780 \text{ m}^2; ponqrs = 0,7220 \text{ m}^2 = P_5, \\ srut &= 0,4940 \text{ m}^2; rqvu = 0,1690 \text{ m}^2; srqvut = 0,6630 \text{ m}^2 = P_6. \end{aligned}$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = abefiknqv = 5,5335 \text{ m}^2 = R.$$

Efterat først Tyngdepunkterne for de tolv Figurer ere bestemte, finder man let det fælles Tyngdepunkt for  $abcd$  og  $befc$ , for  $degh$  og  $cfig$  o. s. v., da Afstandene mellem Tyngdepunkterne kunne maales paa Tegningen og Figurerens Arealer i Forvejen ere bestemte.

Gennem disse sidst fundne seks Tyngdepunkter tegnes derefter Kraftlinierne for Kræfterne  $P_1, P_2, \dots, P_6$ , og nu bestemmer man paa Fig. 138<sup>b</sup> Beliggenheden af deres Resultant  $R$  ved Hjælp af Kraftpolygonen  $P_1, P_2, \dots, P_6$ , samt ved Straalerne fra den vilkaarligt valgte Pol  $O'$  og den hertil svarende Stangpolygon  $I' II' \dots VII'$ . Gennem  $A$  (Fig. 138<sup>a</sup>)  $115 \text{ mm}$  fra  $v$  er Kraftlinien for  $P_7$  tegnet, og gennem Skæringspunktet  $B$  mellem den og  $R$  er  $P_8$  trukket hen til Punkt  $C$ , som ligger  $175 \text{ mm}$  fra  $e$ . Paa Fig. 138<sup>b</sup> er endelig Størrelsen af  $P_7$  og  $P_8$  samt af de øvrige i Middeltryklinien  $I II III IV V VI B$  virkende Kræfter fundne.

$$P_7 = 6,92 \text{ m}^2, \text{ altsaa } T_7 = 6,92 \cdot 1600 = \text{ca. } 11500 \text{ kg}.$$

Paavirkningen ved Toppen bliver derved til

$$t = \frac{11500}{1000 \cdot 230} = 0,05 \text{ kg/mm}^2.$$

$$P_8 = 8,9 \text{ m}^2, \text{ altsaa } T_8 = 8,9 \cdot 1600 = \text{ca. } 14240 \text{ kg.}$$

Ved Vederlaget bliver Paavirkningen derefter

$$t = \frac{14240}{1000 \cdot 350} = \text{ca. } 0,041 \text{ kg/mm}^2.$$

Anstiller man en lignende Undersøgelse for de øvrige Tværsnits Vedkommende, vil det vise sig nødvendigt at give Hvælvingen en Tykkelse af  $1\frac{1}{2}$  Sten indtil Snit *on* og først derfra til Toppen gøre den 1 Sten tyk. I Facadeskifterne vil man selvfølgelig gøre Hvælvingen overalt  $1\frac{1}{2}$  Sten. Man har nu set, at Hvælvingen opfylder den første Betingelse, idet der intetsteds er Fare for Knusning, og der vil som Følge heraf og af Middeltrykliniens Belligenhed heller ikke være Fare for Væltning.

Undersøger man Hvælvingen for Glidnings Vedkommende i de syv Snit, vil man se, at Vinklerne, som de enkelte Kræfter danne med en paa vedkommende Snit vinkelret Linie, alle ville være mindre end Friktionsvinklen.

Eksp. 103. Paa Fig. 139<sup>a</sup> og <sup>b</sup> er der vist, hvorledes man kan bestemme en af de Piller, som bære den i Fig. 138 behandlede Hvælving. Trykket  $P_1$  er her af samme Størrelse og Retning som  $P_8$  paa Fig. 138<sup>b</sup>, men Kraftpolygonen paa Fig. 139<sup>b</sup> er for Pladsens Skyld kun tegnet i den halve Størrelse. Pillens Murværk tænkes ført op til samme Højde som Murværket over Hvælvingen. Murens Højde indtil Vederlaget er 3,25 m og til dens øverste Flade altsaa 5,50 m. Man maa her prøve sig frem, indtil man finder en passende Murtykkelse. En Mur som den paa Fig. 139<sup>a</sup> viste, hvor Tykkelsen i Grundfladen er 2,63 m, vil opfylde de tre Betingelser. Efterat have udregnet, at

$$\begin{aligned} abcd &= 4,770 \text{ m}^2 = P_2, & dcfe &= 0,750 \text{ m}^2 = P_3, \\ efgh &= 1,710 \text{ m}^2 = P_4, & hgki &= 1,710 \text{ m}^2 = P_5, \\ iklm &= 1,710 \text{ m}^2 = P_6, & mlon &= 1,710 \text{ m}^2 = P_7, \\ & & nopq &= 1,710 \text{ m}^2 = P_8, \end{aligned}$$

har man ved Hjælp af disse Kræfter og  $P_1$ , som er lig med 8,9 m<sup>2</sup>, paa Fig. 139<sup>b</sup> tegnet den af Kræfterne dannede Kraftpolygon.

*O* er valgt til Pol og den dertil svarende Middeltryklinie bestemt. De fleste af dennes Sider ville imidlertid gaa gennem eet Punkt, eftersom de fleste af Kraftlinierne, nemlig  $P_4, P_5, \dots P_8$  falde i samme Linie. De Punkter, i hvilke Middeltrykliniens Sider  $P_{14}, P_{13}, P_{12}$  o. s. v. træffe de Fuger, paa hvilke de virke, ere bestemte ved Forlængelse af de respektive Kraftlinier til den ene eller den anden Side og ere derefter forbundne ved en krum Linie, der kaldes Støttelinien. Ved Betragtning af Figuren vil man indse, at der vil være størst Fare for Knusning ved Grundfladen, da den virkende Kraft her er størst samtidig med, at dens Angrebepunkt falder nærmest Kanten. For Knusnings Vedkommende behøver man altsaa kun at anstille en Undersøgelse her. Den lodrette Komposant af  $P_9$  er 19,5 m<sup>2</sup>, hvorved Trykket  $T_9$ , naar man betragter et Stykke af Pillen, der er 1 m langt og opmuret af almindelige brændte Sten, vil blive

$$T_9 = 19,5 \cdot 1600 = 31200 \text{ kg.}$$

$T_9$  angriber i en Afstand fra den ene Kant, som er mindre end  $\frac{1}{3}$  af Murens Tykkelse, hvorfor Formel (53) maa benyttes til Bestemmelse af Paavirkningen pr. mm<sup>2</sup>. Denne vil blive

$$t = \frac{2 \cdot 31200}{3 \cdot 1000 \cdot 400} = 0,052 \text{ kg/mm}^2.$$

Da der saaledes ikke er Fare for Knusning, og Støttelinien falder indenfor Murens Begrænsning, er der heller

ikke Fare for Væltning. For Glidnings Vedkommende vil der være størst Fare i Fugen *ef*, fordi den derpaa virkende Kraft  $P_{14}$  danner en større Vinkel med Perpendikulæren end nogen af de andre Kræfter. Da Vinklen imidlertid er ca.  $33^\circ$  og saaledes er beliggende indenfor de foran angivne Grænseværdier, tør man forudsætte, at Glidning ikke vil finde Sted, naar blot Mørtelen ikke er ganske frisk.

Den foreliggende Hvælvingspille er meget svær, hvilket ligger i, at Trykket  $P_1$  danner en temmelig stor Vinkel med den lodrette Linie. Jo fladere Cirkelbuen bliver, desto større bliver Sidetrykket paa Pillen, og desto sværere maa den gøres, da det, for at undgaa Glidning i det Vederlaget nærmeste Skifte, vil være nødvendigt at skaffe et stort Tryk til Veje oven over dette Skifte. Man vilde straks kunne faa et omtrentligt Skøn over Pillens Tykkelse, naar man (se Fig. 139<sup>b</sup>) fra *O* trak  $P_{14}$  saaledes, at den med den lodrette Linie dannede en Vinkel ligestor med Gnidningsvinklen. Derved bestemmes  $P_2 + P_3$ , og da Højden *ae* er bekendt, finder man let Afstanden *ab*. En anden og lettere Maade at undgaa Faren for Glidning paa er den, at man gør de nærmest Vederlaget liggende Skifter hældende.

Eksp. 104. Figurerne 140<sup>a</sup> og <sup>b</sup> og 141<sup>a</sup> og <sup>b</sup> vise henholdsvis foreløbig og endelig Bestemmelse af en cylindrisk Hvælvning, hvor Ledelinien for den indre Hvælvflade er en Halvcirkel med Diameter 5 m. Hvælvingen tænkes belastet med Murværk indtil en Højde af 1,25 m over den indre Hvælvlinies Top. Da Fremgangsmaaden her er fuldstændig analog med den paa Fig. 137<sup>a</sup> og <sup>b</sup> og 138<sup>a</sup> og <sup>b</sup> anvendte, skal der kun gives en ganske kort Forklaring. Af den paa Fig. 140<sup>a</sup> fundne Middeltryklinie fremgaar det, at det farligste Sted vil være omtrent ved *f*. Her virker der

et Tryk, som er repræsenteret ved  $P_{11} = 3,7 \text{ m}^2$ , og Trykket  $T_{11}$  bliver altsaa

$$T_{11} = 3,7 \cdot 1600 = 5920 \text{ kg.}$$

Ønsker man, at Middeltryklinien paa dette Sted skal falde i en Afstand fra den indre Hvælvlinie af  $\frac{1}{3}$  af den Tykkelse, som Hvælvingen vil faa her, og kaldes denne Tykkelse *h*, vil man ifølge Ligning (50) have

$$0,06 = \frac{2 \cdot 5920}{1000 h}, \text{ hvoraf } h = \text{ca. } 200 \text{ mm, altsaa } \frac{1}{3} h = \text{ca. } 70 \text{ mm.}$$

Da denne Afstand paa Tegningen er ca. 90 mm, vil Middeltryklinien kunne rykke lidt nærmere til den indre Hvælvlinie, hvilket vilde kunne opnaas ved at lade  $P_8$  og  $P_{11}$  angribe noget nærmere ved den. Paa Fig. 140<sup>a</sup> angriber  $P_8$  i en Afstand af 550 mm fra den indre Hvælvlinie, og man kunde saaledes passende i Stedet for lade den træffe 474 mm derfra. Naar dens Angrebepunkt forudsættes at falde i en Afstand af  $\frac{1}{3}$  af Hvælvingens Tykkelse fra den ydre Hvælvkant, vil Hvælvningstykkelsen ved Vederlaget blive 710 mm eller 3 Sten. Ved Toppen ligger Angrebepunktet kun 230 mm fra den indre Hvælvlinie, og her tør man næppe gaa nærmere. Gøres Hvælvingen her  $1\frac{1}{2}$  Sten eller 350 mm tyk, vil Trykket netop falde i  $\frac{1}{3}$  af Hvælvningstykkelsen fra den ydre Hvælvkant. De fundne Hvælvningstykkelser af 710 mm ved Vederlaget og 350 mm ved Toppen tilligemed den angivne Beliggenhed af Angrebepunkterne for de paa disse Steder virkende Kræfter ere derefter lagte til Grund for den paa Fig. 141<sup>a</sup> og <sup>b</sup> foretagne Undersøgelse.

Det lodrette Tryk paa Vederlaget vil her, hvor  $P_8$ 's lodrette Komposant er  $7 \text{ m}^2$ , blive

$$T_8 = 7 \cdot 1600 = 11200 \text{ kg.}$$

$$t = \frac{2 \cdot 11200}{1000 \cdot 710} = \text{ca. } 0,03 \text{ kg/mm}^2.$$

Ved Toppen er  $P_7 = 2,55 \text{ m}^2$ , altsaa

$$T_7 = 2,55 \cdot 1600 = 4080 \text{ kg.}$$

Ifølge (50) vil  $t = \frac{2 \cdot 4080}{1000 \cdot 350} = \text{ca. } 0,023 \text{ kg/mm}^2$ .

Midt imellem  $mn$  og  $hi$  vil Trykket komme nærmest ved den indre Hvælmlinie, nemlig i en Afstand derfra af 105 mm. Den derpaa virkende Kraft vil være ca.  $4,1 \text{ m}^2$ , hvortil svarer

$$T = 4,1 \cdot 1600 = 6560 \text{ kg,}$$

altsaa ifølge (53)  $t = \frac{2 \cdot 6560}{1000 \cdot 3 \cdot 105} = \text{ca. } 0,042 \text{ kg/mm}^2$ .

Hvælvingen bør saaledes ikke gøres svagere end vist paa Fig. 141, hvor en passende Aftrapning i Hvælvingstykkelserne tillige er angiven. For Væltning er der ingen Fare, og for Glidnings Vedkommende vil Faren være størst ved Vederlaget  $ae$ , hvor  $P_8$ 's Vinkel med den paa Snittet vinkelrette netop er lig med Friktionsvinklen. For de andre Snits Vedkommende ville de der virkende Tryk med de vinkelrette paa Snittene danne Vinkler, som ere mindre end Friktionsvinklen.

I de Hvælvinger, som hidindtil ere omtalte, var Reaktionen i Toppen vandret, fordi Hvælvingerne forudsattes at være symetriske med Hensyn til et lodret Plan gennem Toppen og tillige symetrisk belastede. Er dette ikke Tilfældet, kan man ikke forud vide, hvilken Retning Tangenten til Middeltryklinien i Toppen vil faa, eller med andre Ord, man kan ikke antage, at Reaktionen i Toppen er vandret. I Stedet for at forudsætte, at denne Reaktion er vandret, opstiller man da den Betingelse, at

Middeltryklinien skal gaa gennem tre Punkter, medens man i de foregaaende Tilfælde forud kun valgte to Punkter som Udgangspunkter for den, men man maa nu undersøge hele Hvælvingen under eet og kan ikke som forhen nøjes med kun at behandle den ene Halvdel af den. Som det tredie Punkt vil det være det naturligste at vælge et Punkt i det andet Vederlag, men af Hensyn til Konstruktionen er det paa ingen Maade nødvendigt at vælge det her. Det kan godt, ligesom de to andre Punkter, lægges ganske vilkaarligt. Den Opgave at lægge en Middeltryklinie gennem tre givne Punkter løses ved følgende Sætning om Stangpolygoner: Har man to Stangpolygoner til samme System af parallelle Kræfter, den ene med Siderne  $a_1, b_1, c_1$  o. s. v. og den anden med Siderne  $a_2, b_2, c_2$  o. s. v., da ville Skæringspunkterne imellem  $a_1$  og  $a_2, b_1$  og  $b_2, c_1$  og  $c_2$  o. s. v. alle ligge i en ret Linie, der vil være parallel med den Linie, som forbinder Polerne for de to Stangpolygoner. Denne Sætning er allerede et Sted i det foregaaende forudsat gældende, uagtet den ikke er nævnt med Ord, idet Linien  $AN$  paa Fig. 52<sup>a</sup> i Ekspl. 32 i Beviset er forudsat parallel med Forbindelseslinien mellem de to Poler  $p$  og  $Q$  paa Fig. 52<sup>b</sup>.

Paa Fig. 142<sup>a</sup> danne  $P_a, P_b, \dots P_h$  et givet Kraftsystem, og  $A, B$  og  $C$  betegne de tre Punkter, hvorigennem Middeltryklinien skal lægges. Efterat man paa Fig. 142<sup>b</sup> har dannet den til Kraftlinierne svarende Kraftpolygon, har man fra et vilkaarligt Punkt  $O_1$  som Pol tegnet Polstraalerne til Kraftpolygonens Vinkelspidser. Parallele med disse Polstraaler tegnes dernæst Siderne  $a_1, b_1, c_1$  o. s. v. af en gennem  $A$  gaaende Stangpolygon. En Stangpolygon gennem  $A$  og  $B$  med Siderne  $a_2, b_2, c_2$  o. s. v. faar Skæringspunktet mellem  $a_1$  og  $a_2$  liggende i  $A$ , og gennem dette Punkt maa da den Linie, som indeholder Skæringspunkterne mellem de tilsvarende Sider

i de to Stangpolygoner, gaa. Denne Linie  $AD$ 's Retning vælges vilkaarligt, og gennem  $O_1$  tegnes en Linie parallel med den; paa denne sidste Linie maa da Polen  $O_2$  findes. Punktet  $B$  ses paa Fig. 142<sup>a</sup> at ligge saaledes, at  $d_2$  i den søgte Stangpolygon vil gaa gennem det. Man forlænger da blot Siden  $d_1$  til Skæring med Linien  $AD$ , og Skæringspunktet  $E$  forbindes med  $B$ ;  $EB$  er da Stangpolygonsiden  $d_2$ , og man tegner derefter paa Fig. 142<sup>b</sup> den til  $d_2$  svarende Polstraale. Skæringspunktet  $O_2$  mellem denne Polstraale og den gennem  $O_1$  med  $AD$  parallelt trukne Linie vil saa være Polen for Stangpolygonen med Siderne  $a_2, b_2, c_2$  o. s. v.

En Stangpolygon gennem  $A, B$  og  $C$  med Siderne  $a_3, b_3, c_3$  o. s. v. maa have Skæringspunktet mellem  $a_2$  og  $a_3$  liggende i  $A$  og Skæringspunktet mellem  $d_2$  og  $d_3$  i  $B$ . Linien  $AB$  maa altsaa indeholde alle Skæringspunkterne mellem tilsvarende Sider i de to sidstnævnte Stangpolygoner. Punktet  $C$  ligger saaledes, at Siden  $g_3$  vil komme til at gaa derigennem. Man forlænger derfor Siden  $g_2$ , indtil den skærer  $AB$  i  $F$ , og trækker en ret Linie fra  $F$  til  $C$ . Linien  $CF$  bliver da  $g_3$ . Den med  $g_3$  parallelle Polstraale tegnes, og Skæringspunktet mellem denne Polstraale og en Linie, der gennem  $O_2$  er tegnet parallel med  $AB$ , vil da være Polen  $O_3$  for den søgte Stangpolygon, hvis Sider ere  $a_3, b_3, c_3$  o. s. v., og som vil gaa gennem de tre givne Punkter  $A, B$  og  $C$ .

Polstraalerne gennem  $O_3$  angive Størrelsen og Retningen af de i de tilsvarende Dele af Hvælvingen virkende Tryk; Reaktionerne i Vederlagene angives ved første og sidste Polstraale. Undersøgelsen angaaende de fornødne Hvælvingstykkelser m. m. vil iøvrigt være ganske analog med, hvad der er udviklet i det foregaaende.

Blandt de særlige Anvendelser, der gøres af Mure, skal man omtale deres Benyttelse til at forhindre en Jord-

masse i at skride ud og danne en Skraaning. Saadanne Mure kaldes Beklædningsmure. De maa være saa svære, at de kunne modstaa de Tryk, som den bagved dem liggende Jordmasse udøver paa dem. Fremdeles maa en saadan Mur hverken glide ved Grundfladen eller i noget Skifte. Kender man Størrelsen af Jordtrykket samt den Retning, hvorefter det virker, og det Punkt af Muren, hvori Jordtrykket angriber, vil Fremgangsmaaden ved Bestemmelsen af Murtykkelserne være ganske analog med den ved Hvælvingspiller omtalte.

#### *Jordmassers Sidetryk.*

Naar en Jordmasse ikke begrænses, vil den danne en Skraaning, hvis Hældning mod det vandrette Plan er bestemt ved Jordartens Gnidningsvinkel. Begrænses den derimod af en Mur eller paa anden Maade, vil Jordmassen have en Tilbøjelighed til at revne efter et Plan, det saakaldte Skilleplan, og det vil da være den mellem Muren og Skilleplanet liggende Jordmasse, som vil trykke paa Muren. Er Jordens Overflade vandret i Højde med Murens øverste Flade, kan dette Skilleplan, idet der ikke tages Hensyn til den Gnidningsmodstand, som opstaar mellem Muren og Jordpartiklerne, findes paa følgende Maade (se Fig. 143): Betegner  $AB$  den ind mod Jordmassen vendende Murflade, tegner man først gennem  $B$  en Linie  $BD$ , som med den vandrette Linie  $BC$  danner Vinklen  $g$ , der er vedkommende Jordarts Gnidningsvinkel, og derefter halverer man Vinklen  $ABD$ . Vinklens Halveringslinie  $BE$  angiver da Skilleplanet, og det vil altsaa være Jordprismet med Grundflade  $AEB$  og Højde 1 m, som paa et 1 m langt Stykke af Muren vil udøve Tryk af Størrelse

$$T = \frac{1}{2} \rho a^2 \sin v, \quad (54)$$

hvor  $\rho$  er Vægten af 1 m<sup>3</sup> Jord,  $v = \angle ABC$ , Murfladens



Vinkel med den vandrette Linie og  $a = AE$ . Trykket  $T$ 's Retning bliver vinkelret paa Murens Bagside, og dets Angrebepunkt falder i Afstanden  $\frac{1}{3} AB$  fra Punktet  $B$ .

Hviler der ovenpaa den i Højde med Murens øverste Flade vandret planerede Jordmasse en Vægt  $q$  pr. Arealenhed, konstrueres Skilleplanet paa samme Maade som ovenfor. Tænkes Vægten  $q$  erstattet ved en Jordmasse af samme Art, som den bagved Muren liggende, og antages denne Jordmasses Højde over  $AD$  at blive  $h$  (se Fig. 144), vil Jordmassen udøve et Sidetryk vinkelret paa  $AB$  af Størrelse

$$T = \frac{1}{2} p \left( 1 + \frac{2h}{BF} \right) a^2 \sin v, \quad (55)$$

og dette Tryks Angrebepunkt vil ligge i en Afstand fra  $B$ , som er bestemt ved

$$\frac{1}{3} \frac{BF + 3h}{BF + 2h} \cdot AB. \quad (56)$$

Sætter man i disse sidste Størrelser  $h = 0$ , faar man Udtrykkene for Sidetrykket og dets Angrebepunkts Afstand fra  $B$ , naar Jordmassen er ubelastet.

For nogle almindeligt forekommende Jordarter har Gnidningsvinklen følgende Værdier:

Sandet Ler paa sandet Ler	$\angle g.$
i tør Tilstand.....	30°
i fugtig Tilstand.....	45°
i meget fugtig Tilstand.....	17°
Rent Sand paa rent Sand	
i tør Tilstand.....	26°
i fugtig Tilstand.....	32°
Almindelig Jord.....	33° a 39°

Staa to Mure  $AB$  og  $CD$  (Fig. 145) tæt opad hinanden, og fyldes der løs Jord imellem dem, vil Jordtrykket

paa enhver af Murene blive det samme, som om den anden Mur ikke fandtes. Dette indses saaledes:  $AE$  betegner Skilleplanet for det Jordprisme med Grundflade  $ABE$ , som vilde trykke paa  $AB$ , hvis  $CD$  ikke fandtes. Af dette Prisme vil, naar Muren  $CD$  staar som paa Figuren, et Prisme med Grundflade  $CEF$  bortskæres. Et ligesaa stort Jordprisme med Grundflade  $FCG$  vil imidlertid trykke mod Muren  $CF$ , og denne maa herimod yde en ligesaa stor Reaktion, der vil forplante sig gennem Jordmassen og sammen med Prismet  $AFCB$  udøve et Tryk paa  $AB$  af samme Størrelse som det Tryk, Prismet  $AEB$  vilde udøve.

Ekspl. 105. En Beklædningsmur er 1,25 m høj og har foroven en Bredde af 0,32 m. Den har paa Forfladen en Hældning af  $\frac{1}{2}$  og paa Bagfladen af  $\frac{1}{5}$ . Muren skal begrænse en Jordmasse, som bestaar af rent fugtigt Sand. Ovenpaa denne Jordmasse hviler der en tilfældig Belastning af 1000 kg/m<sup>2</sup> (Fig. 146<sup>a</sup> og <sup>b</sup>).

Gnidningsvinklen for Sandet kan regnes til 32°. Skilleplanet bliver  $EB$ . Sandets Vægt er 1600 kg/m<sup>3</sup>. Den tilfældige Belastning vil altsaa svare til en Sandhøjde af 0,625 m.  $AE = a = 0,8$  m;  $v = 101,4^\circ$ .

Man har først behandlet Muren i dens fulde Højde. Jordmassen vil ifølge (55) udøve et Tryk vinkelret paa  $AB$  af Størrelse

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot 1600 \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot 0,625}{1,25} \right) 0,8^2 \sin 101,4^\circ = \text{ca. } 1000 \text{ kg,}$$

som vil angribe i  $L$  i en Afstand fra  $B$ , der er

$$BL = \frac{1}{3} \cdot \frac{1,25 + 1,875}{1,25 + 1,25} \cdot 1,275 = 0,53 \text{ m.}$$

Muren antages at skulle være af Granit. Et 1 m langt Stykke af den vil da veje

$$P_1 = \frac{1,25}{2} (0,32 + 0,67) \cdot 2700 = \text{ca. } 1675 \text{ kg.}$$

Størrelse og Retning af  $T_1$ 's og  $P_1$ 's Resultant  $R_1$  ere fundne paa Fig. 146<sup>b</sup>, medens dens Beliggenhed paa Fig. 146<sup>a</sup> er bestemt ved, at den skal gaa gennem  $T_1$ 's og  $P_1$ 's Skæringspunkt. Paa samme Maade har man behandlet de Dele af Muren, som ligge ovenover de i Højderne 1', 2' og 3' anbragte vandrette Snit. De respektive Resultanter ere betegnede ved  $R_2$ ,  $R_3$  og  $R_4$ ; deres Størrelser og Retninger ere fundne paa Fig. 146<sup>b</sup> og deres Beliggenhed paa Fig. 146<sup>a</sup>, hvorefter man har tegnet Støttelinien gennem de Punkter, i hvilke Resultanterne skære Grundfladerne for de betragtede Stykker af Muren. Man vil af Figurerne se, at der ved Murens Grundflade  $KB$  vil være størst Fare saavel for Væltning som for Glidning.  $R_1$ 's lodrette Komposant er ca. 1900 kg, og den angriber i en Afstand 50 mm fra Kanten  $K$ . Trykket i Partiklerne ved  $K$  bliver altsaa ifølge (53)

$$t_1 = \frac{2 \cdot 1900}{3 \cdot 1000 \cdot 50} = \text{ca. } 0,0253 \text{ kg/mm}^2,$$

der er mindre end den Paavirkning, man tør byde god Byggegrund, og Faren for Væltning er derved udelukket.  $R_1$ 's Vinkel med den lodrette Linie er ca. 28°, saaledes at der heller ikke er Fare for Glidning.

## INDHOLD.

	Side.
Indledning . . . . .	5
<b>I. Ligevægtslæren . . . . .</b>	<b>6</b>
1. <i>Sammensætning og Opløsning af Kræfter</i> . . . . .	6
a. Kræfterne virke i samme rette Linie . . . . .	6
b. Kræfterne gaa gennem samme Punkt i Planet, men virke i forskellige Retninger . . . . .	7
c. Momenter . . . . .	15
d. Kræfterne virke gennem flere fast forbundne Punkter i forskellige Retninger . . . . .	17
Tyngdepunktsbestemmelser . . . . .	29
Simpsons Formel . . . . .	36
2. <i>Understøtningspunkter og disses Modstande</i> . . . . .	39
3. <i>Bjælker og Aksler</i> . . . . .	42
a. Konstruktionsdelen paavirkes af Kræfter, som ligge i Plan indbyrdes og med dens Akse . . . . .	44
b. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paavirkes af Kræfter, som skære dens geometriske Akse og som ere vinkelrette paa den. Kræfterne ligge derimod ikke alle i samme Plan . . . . .	64
c. Konstruktionsdelen er understøttet i to Punkter og paavirkes af Kræfter, som staa vinkelrette paa dens geometriske Akse. En Del af Kræfterne eller slet ingen af dem skære Aksen . . . . .	66
d. Konstruktionsdelen er understøttet i flere Punkter og paavirkes af en jævnfordelt Belastning . . . . .	70
4. <i>Ledsystemer</i> . . . . .	71
a. Enkelte lukkede Ledsystemer . . . . .	72
b. Enkelte aabne Ledsystemer . . . . .	74
c. Sammensatte Ledsystemer . . . . .	76
<b>II. Styrkelæren . . . . .</b>	<b>101</b>
1. <i>Strækning</i> . . . . .	104
2. <i>Sammentrykning</i> . . . . .	110
Inertimomenter . . . . .	112
Søjler . . . . .	116

	Side.
3. <i>Forskydning</i> . . . . .	119
<i>Nitninger</i> . . . . .	121
<i>Bolte</i> . . . . .	130
4. <i>Bøjning</i> . . . . .	133
5. <i>Vridning</i> . . . . .	154
6. <i>Sammensatte Paavirkninger</i> . . . . .	162
a. <i>Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Forskydning</i> . . . . .	162
b. <i>Tværsnittet paavirkes samtidig til Bøjning og Vridning</i> . . . . .	164
c. <i>Tværsnittet paavirkes til Bøjning og samtidig enten til Sammentrykning eller til Strækning</i> . . . . .	164
III. <b>Stenkonstruktioner</b> . . . . .	169
<i>Hvælvinger og Hvælvingspiller</i> . . . . .	189
<i>Beklædningsmure</i> . . . . .	189
<i>Jordmassers Sidetryk</i> . . . . .	189

---



Fig. 1.

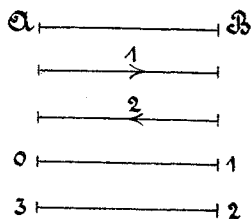


Fig. 2.

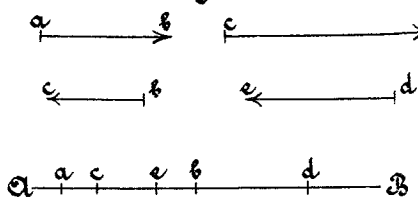


Fig. 3.

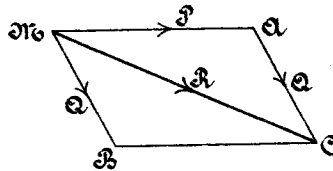


Fig. 4 a.

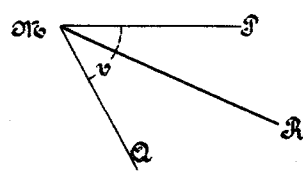


Fig. 4 b.

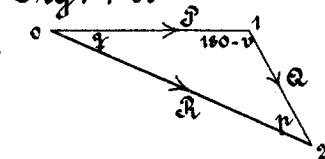


Fig. 5.

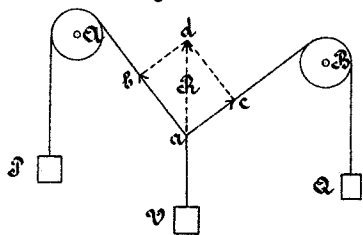


Fig. 7.

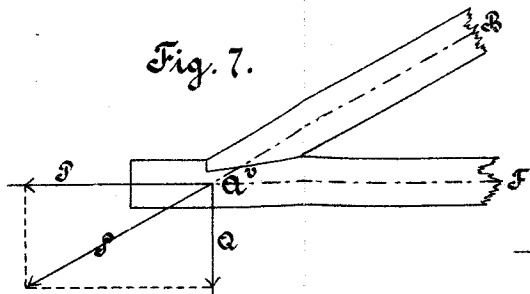


Fig. 10.

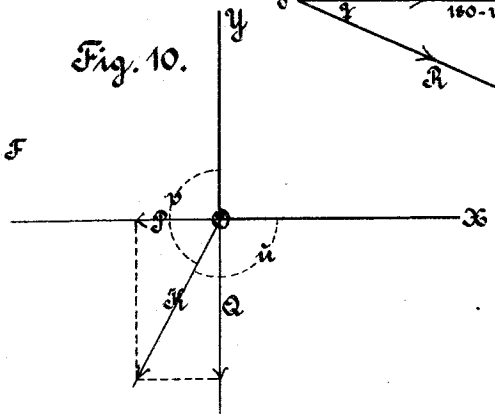


Fig. 6.

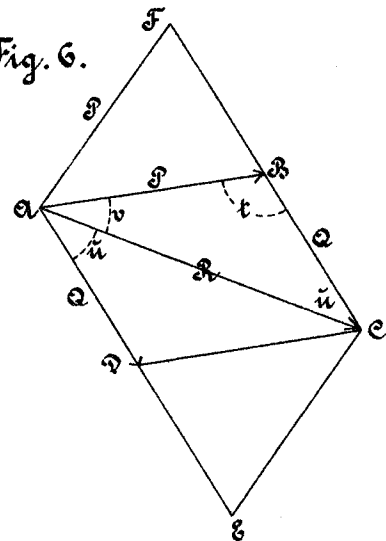


Fig. 8.

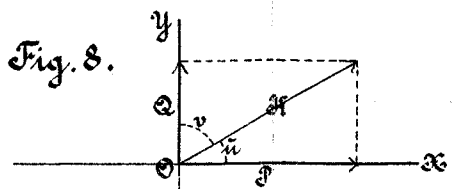


Fig. 9.

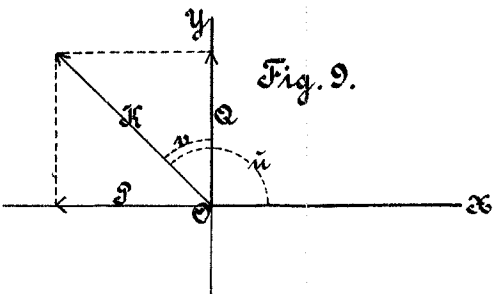


Fig. 11.

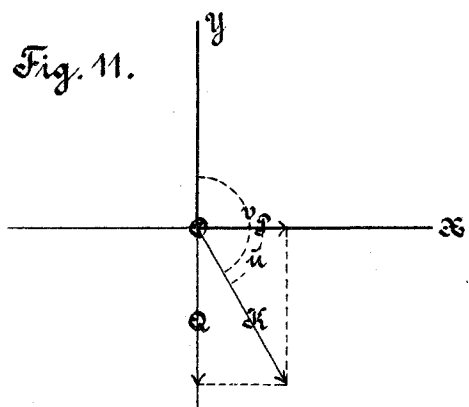


Fig. 12.

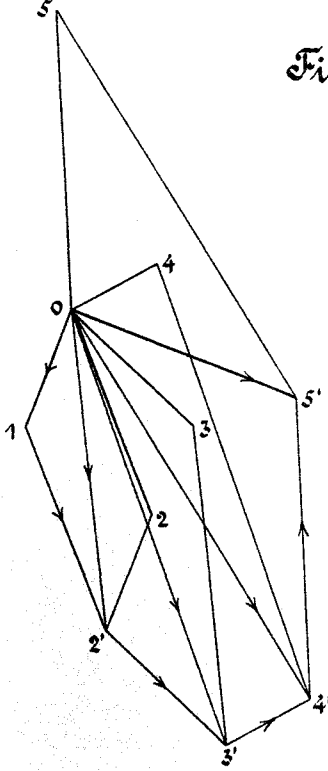


Fig. 13 a.

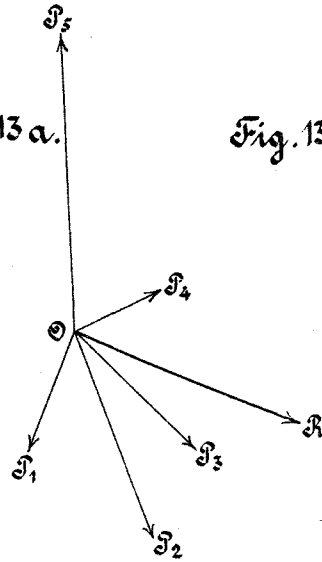


Fig. 13 b.

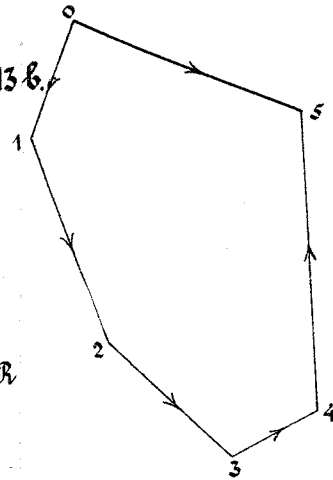


Fig. 15.

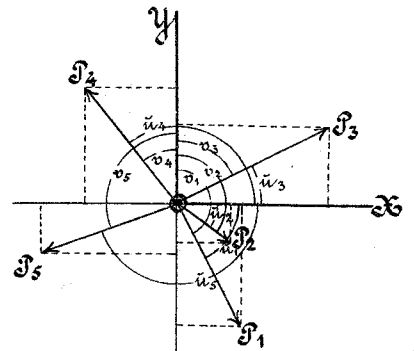


Fig. 14.

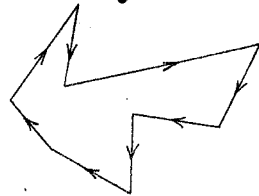


Fig. 16.

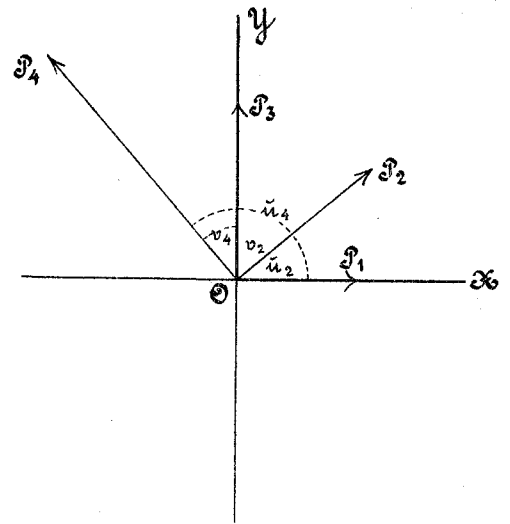


Fig. 17.

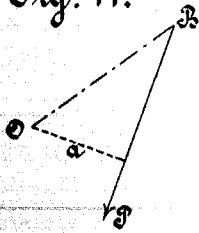
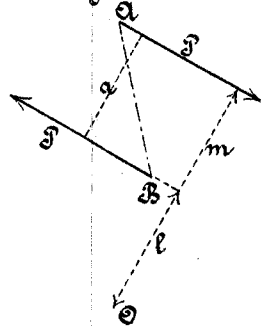
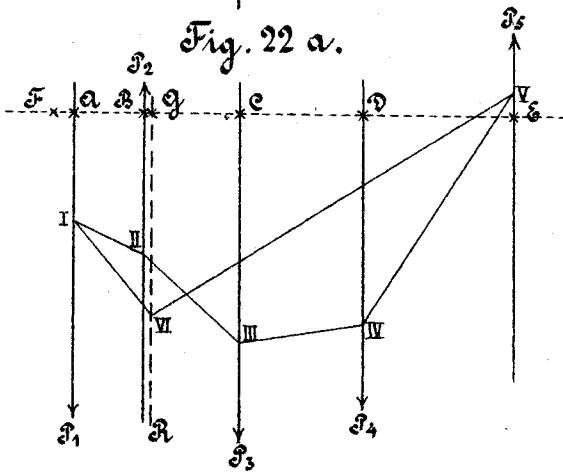
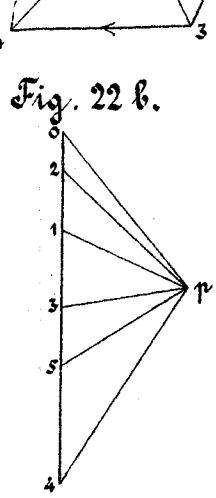
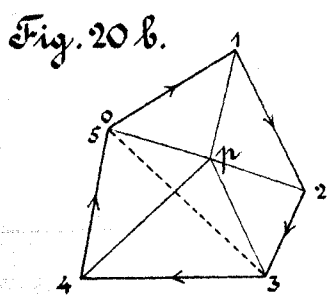
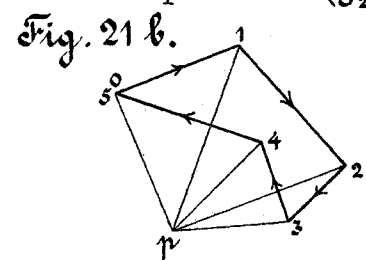
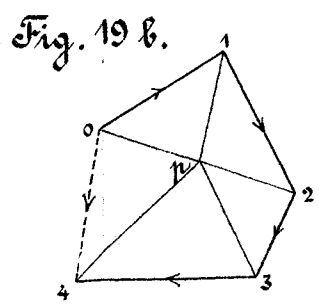
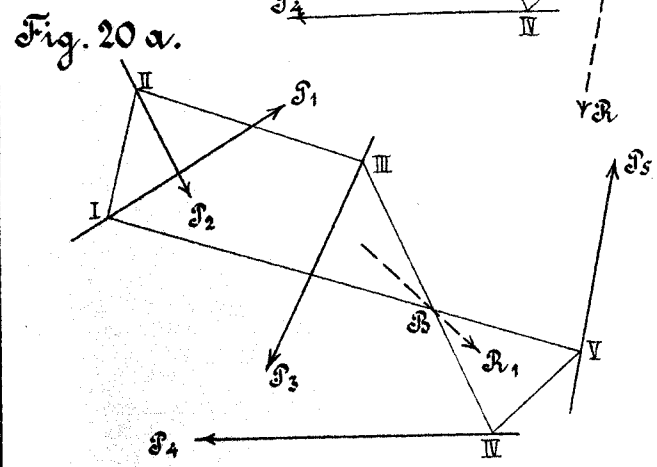
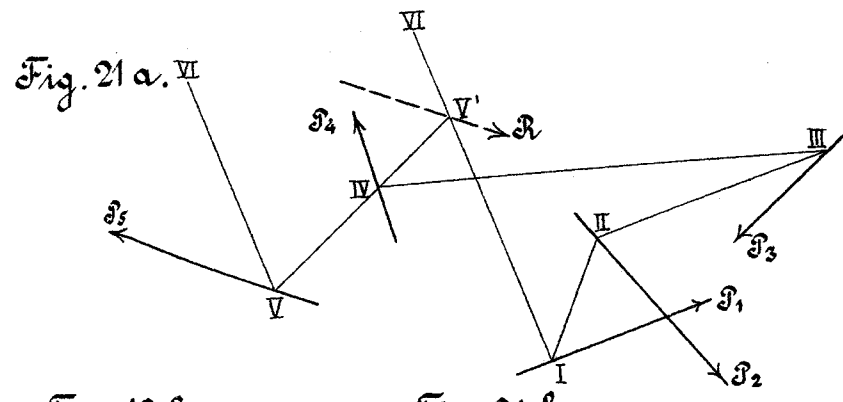
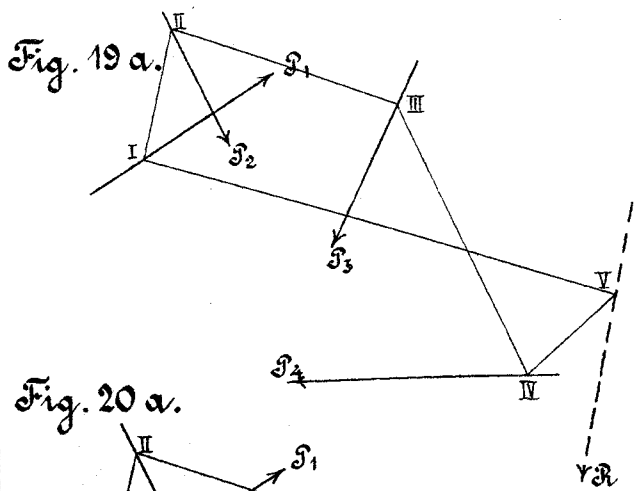


Fig. 18.





# Plan 4.

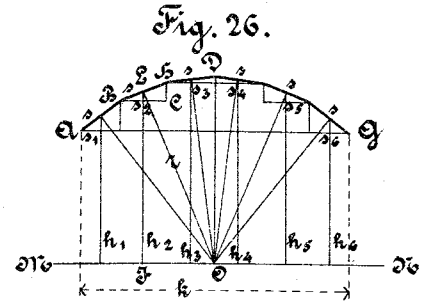
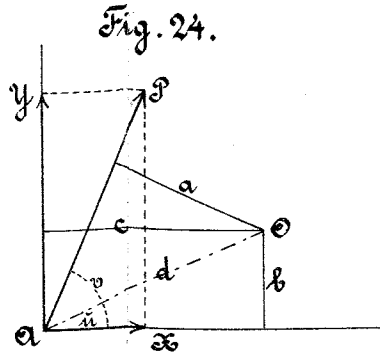
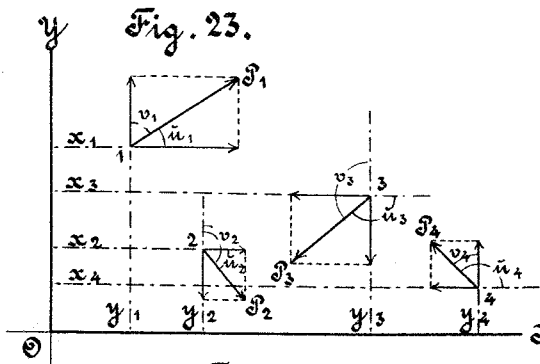


Fig. 25 a.

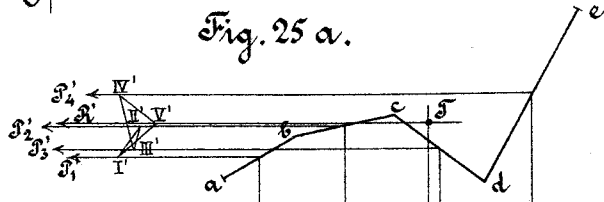


Fig. 30.

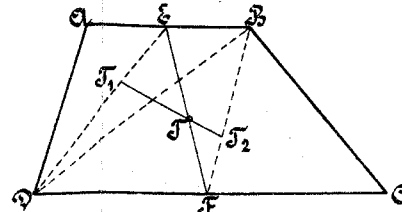


Fig. 27.

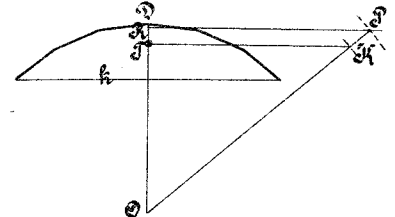


Fig. 25 b.

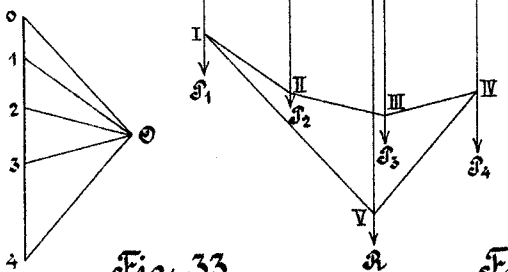


Fig. 31.

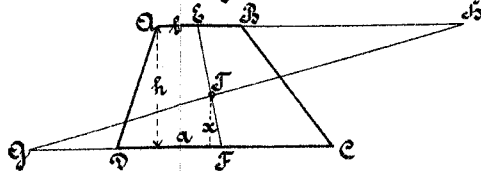


Fig. 28.

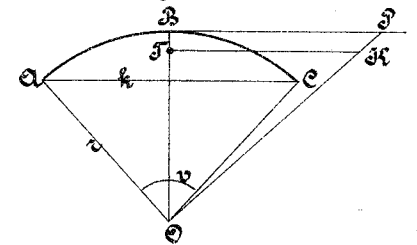


Fig. 33.

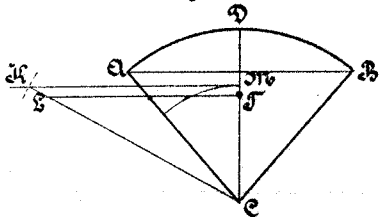


Fig. 34.

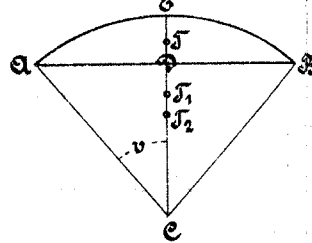


Fig. 32.

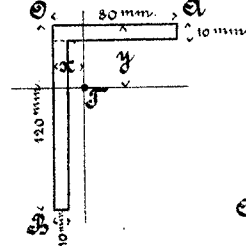


Fig. 29.

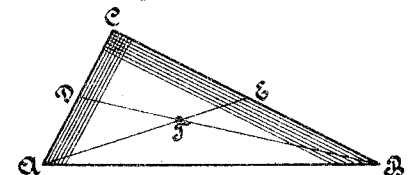


Fig. 23 - 34.



Fig. 35.

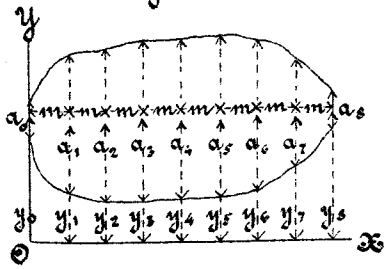


Fig. 39.

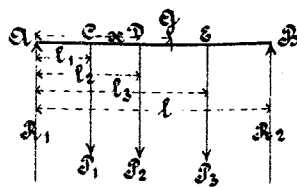


Fig. 38 a.

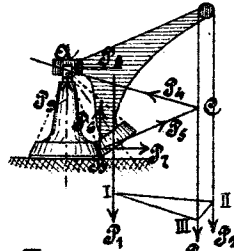


Fig. 38 b.

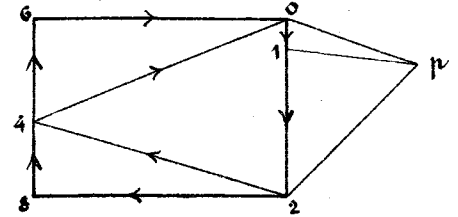


Fig. 42.

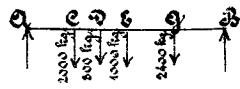


Fig. 41 a.

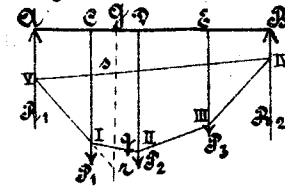


Fig. 41 b.

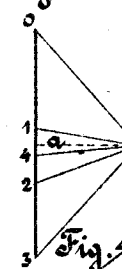


Fig. 43 a.

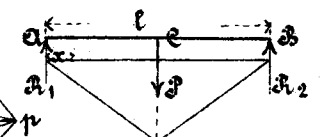


Fig. 36 a.

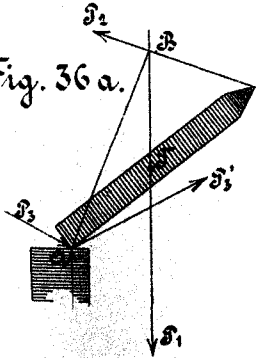


Fig. 36 b.

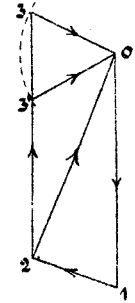


Fig. 44.

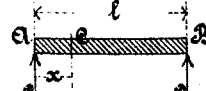


Fig. 40 b.

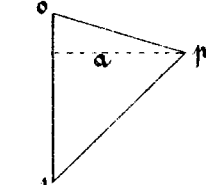


Fig. 37 a.

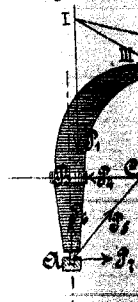


Fig. 37 b.

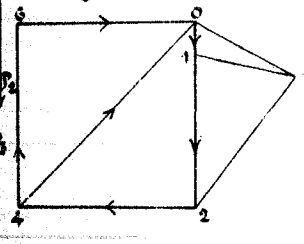


Fig. 40 a.

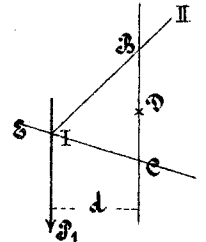


Fig. 45 b.

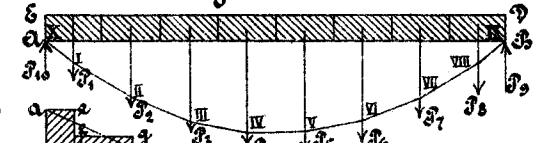
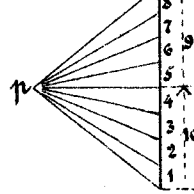


Fig. 45 a.

Fig. 45 c.

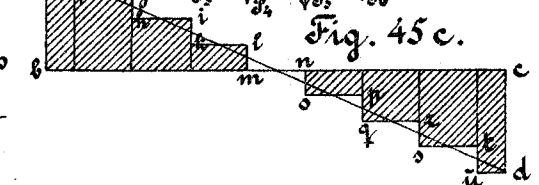


Fig. 46 a.

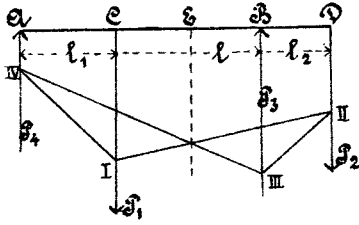


Fig. 46 b.

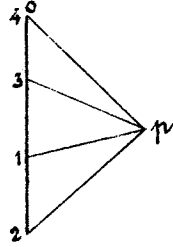


Fig. 47.

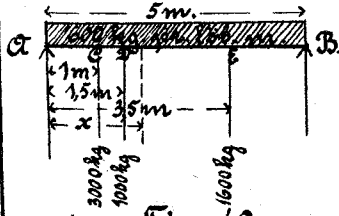


Fig. 48.

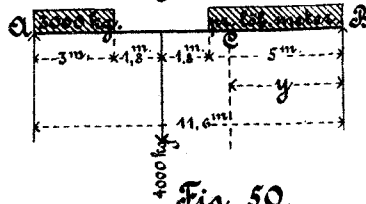


Fig. 49 a.

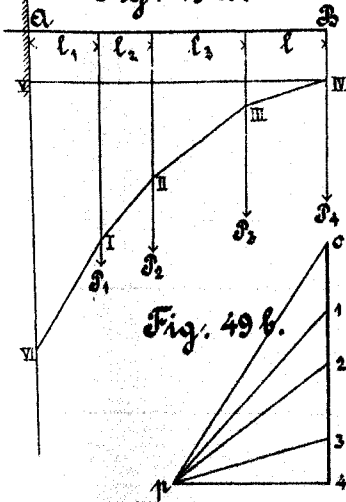


Fig. 49 b.

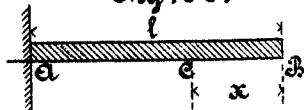


Fig. 51 b.

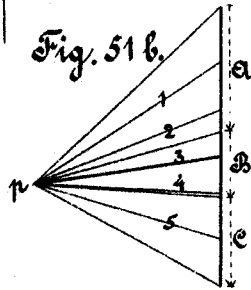


Fig. 52 a.

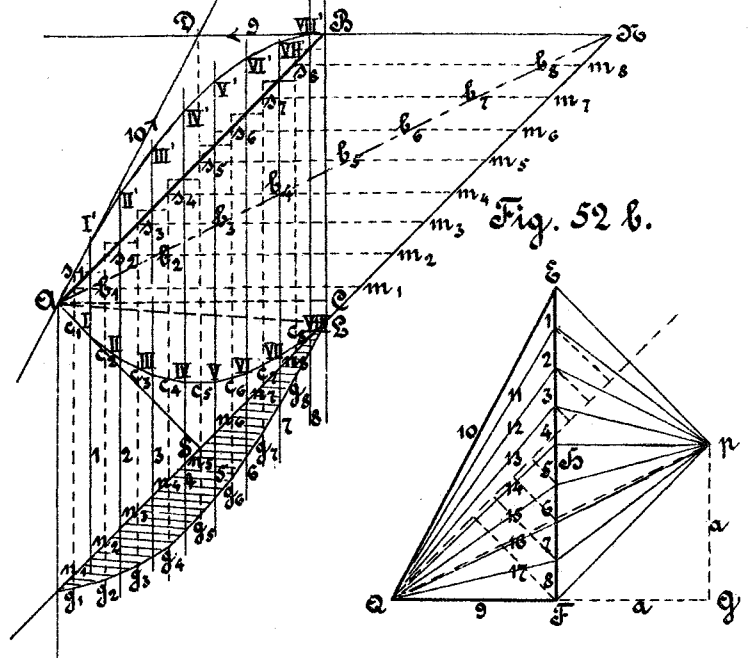
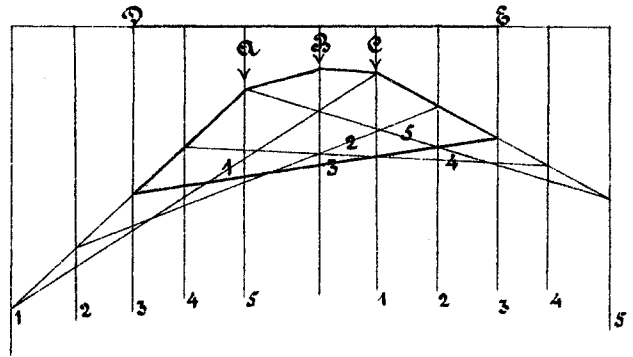


Fig. 52 b.

Fig. 51 a.



Plan 7.

Fig. 53 a.

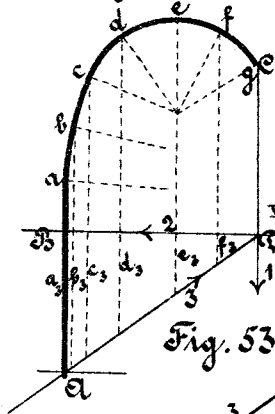


Fig. 53 b.

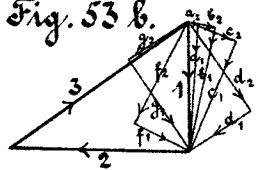


Fig. 54 a.

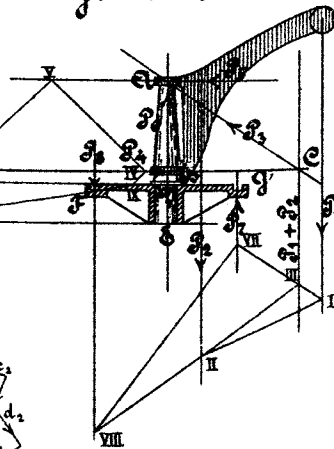


Fig. 54 b.

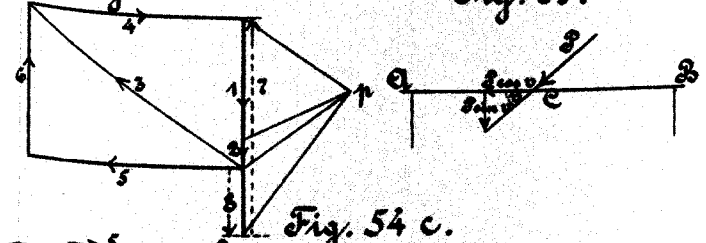


Fig. 55.

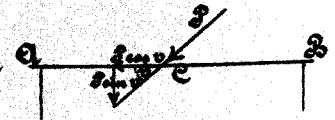


Fig. 54 c.

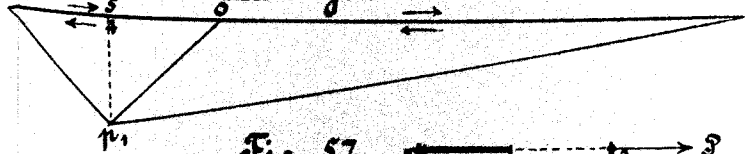


Fig. 57.

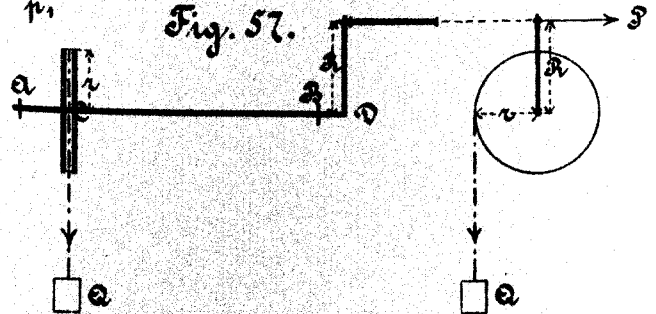


Fig. 56 a.

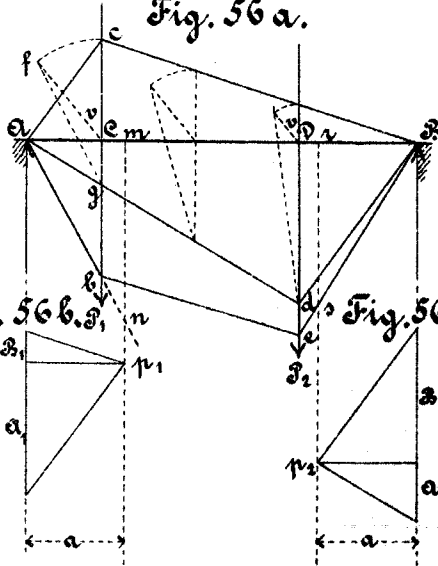


Fig. 56 b.

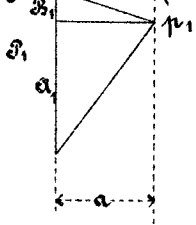


Fig. 56 c.

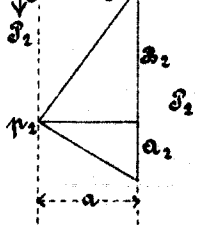


Fig. 58 a.

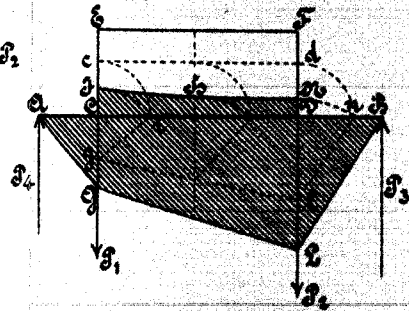


Fig. 58 b.

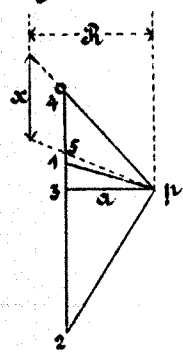




Fig. 70 a.

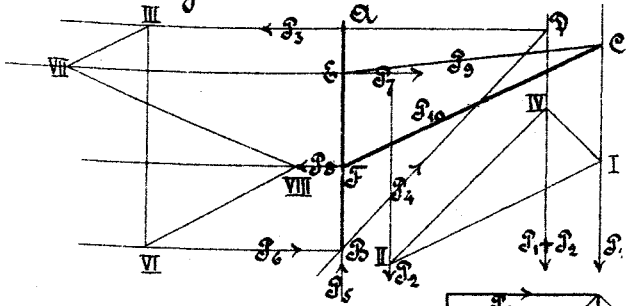


Fig. 70 b.

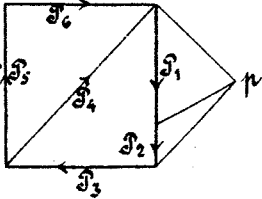


Fig. 70 c.

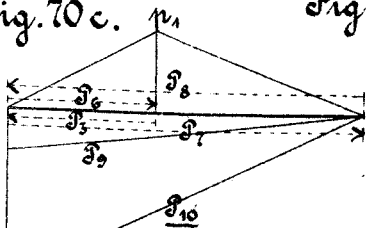


Fig. 71 a.

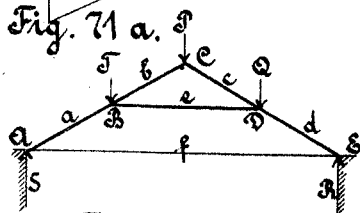


Fig. 71 b.

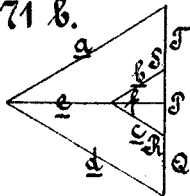


Fig. 73 a.

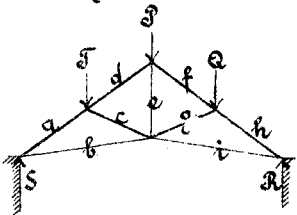


Fig. 73 b.

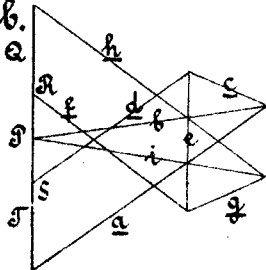


Fig. 72 a.

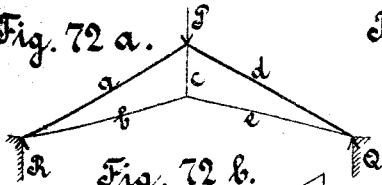


Fig. 72 b.

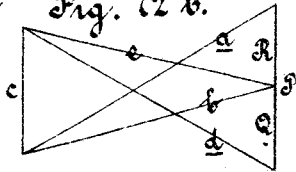


Fig. 74 a.

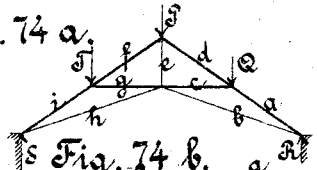


Fig. 74 b.

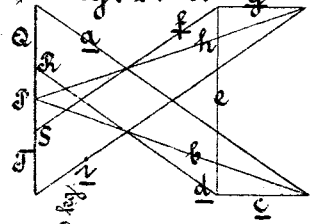


Fig. 76 a.

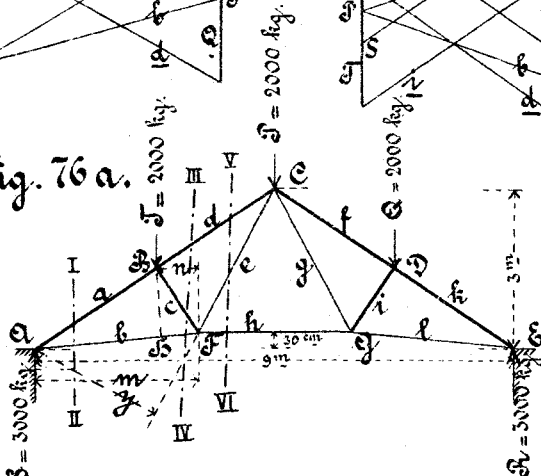


Fig. 75 a.

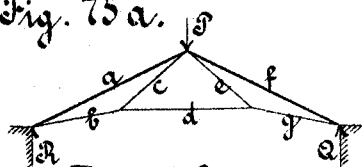


Fig. 75 b.

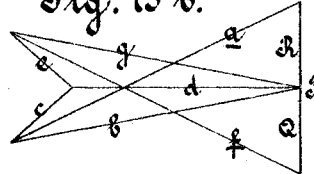
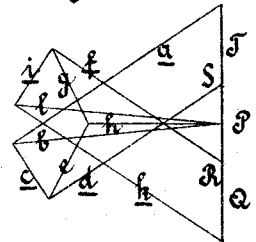


Fig. 76 b.



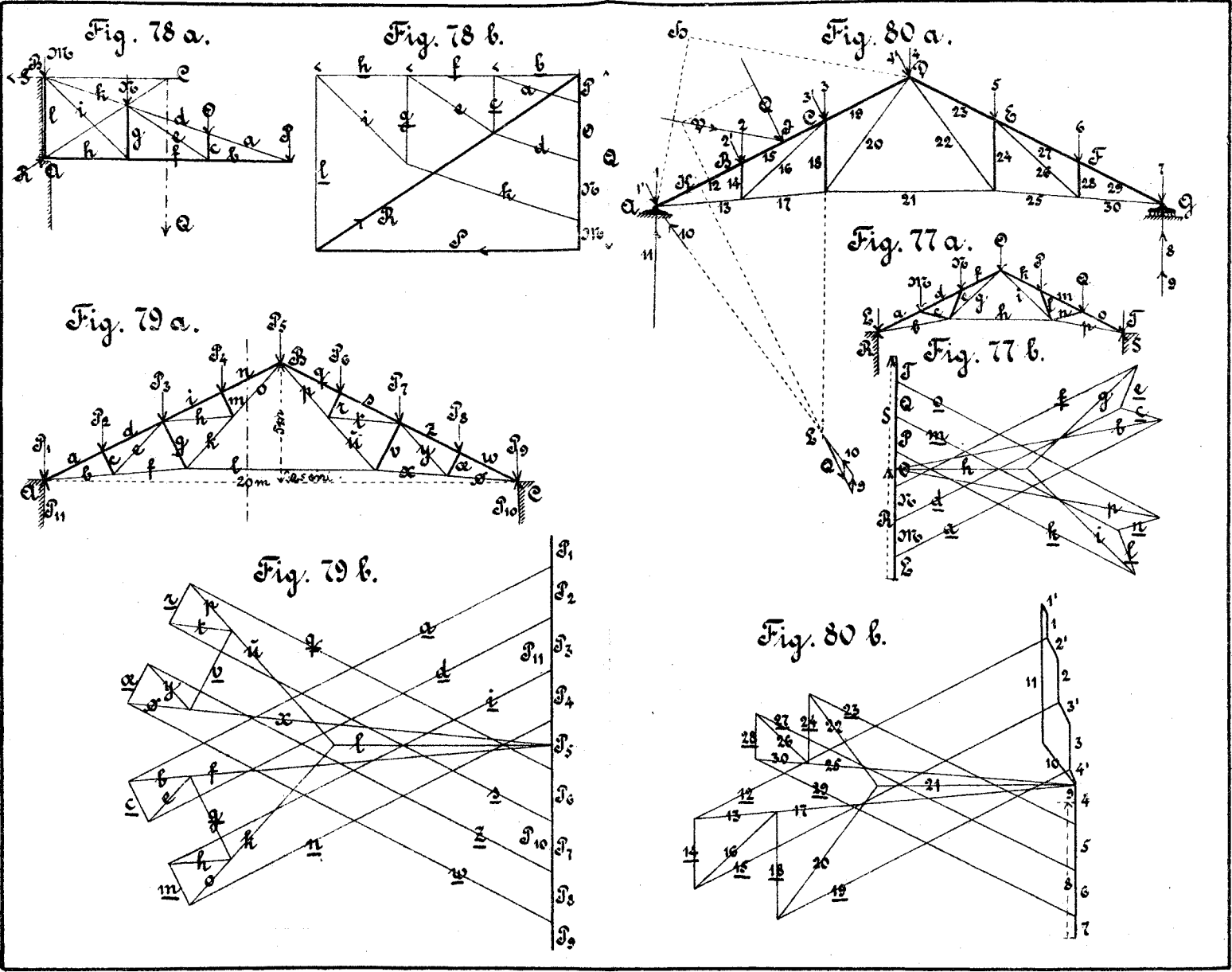


Fig. 77 - 80.

Fig. 81 a.

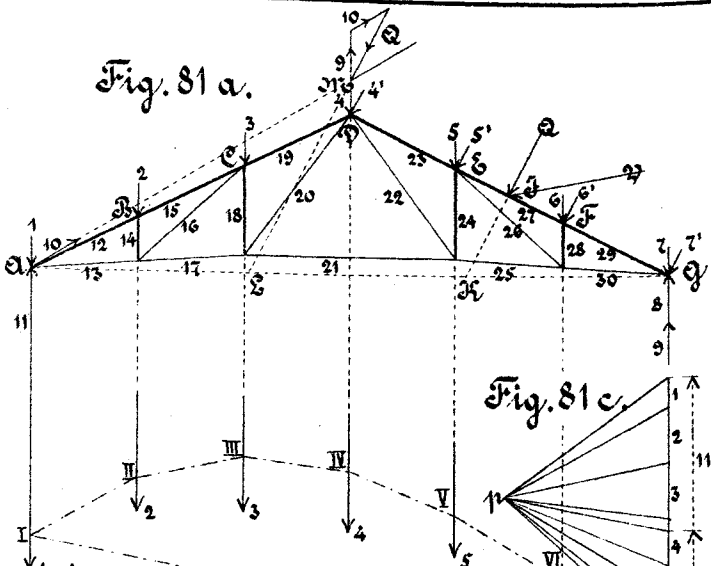


Fig. 81 c.

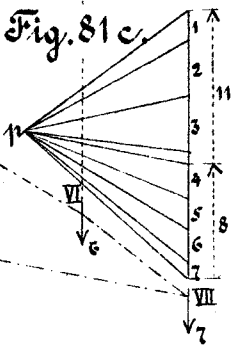


Fig. 81 b.

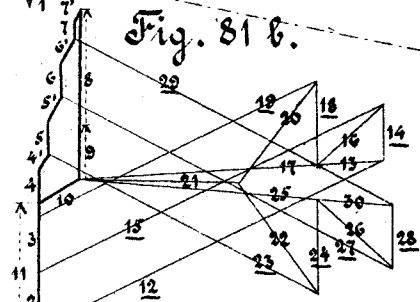


Fig. 82 a.

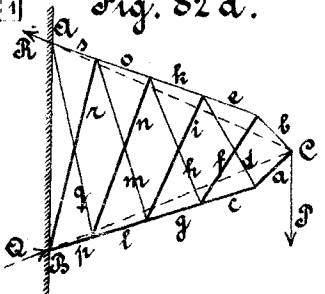


Fig. 82 b.

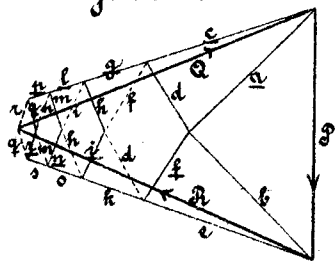


Fig. 83 a.

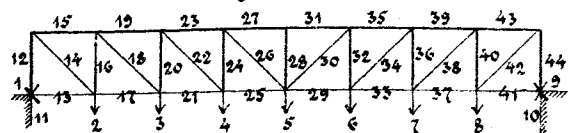


Fig. 83 b.

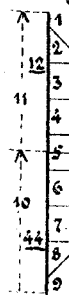


Fig. 84 b.

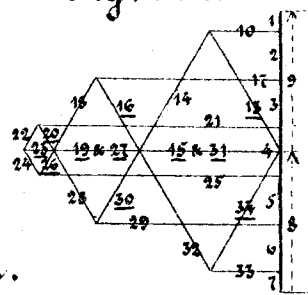


Fig. 84 a.

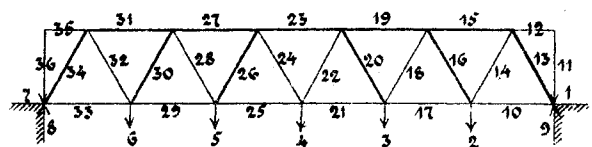


Fig. 85 a.

Fig. 85 b.

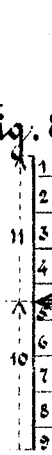


Fig. 86.

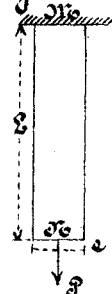
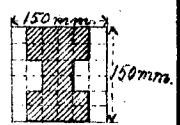


Fig. 87.



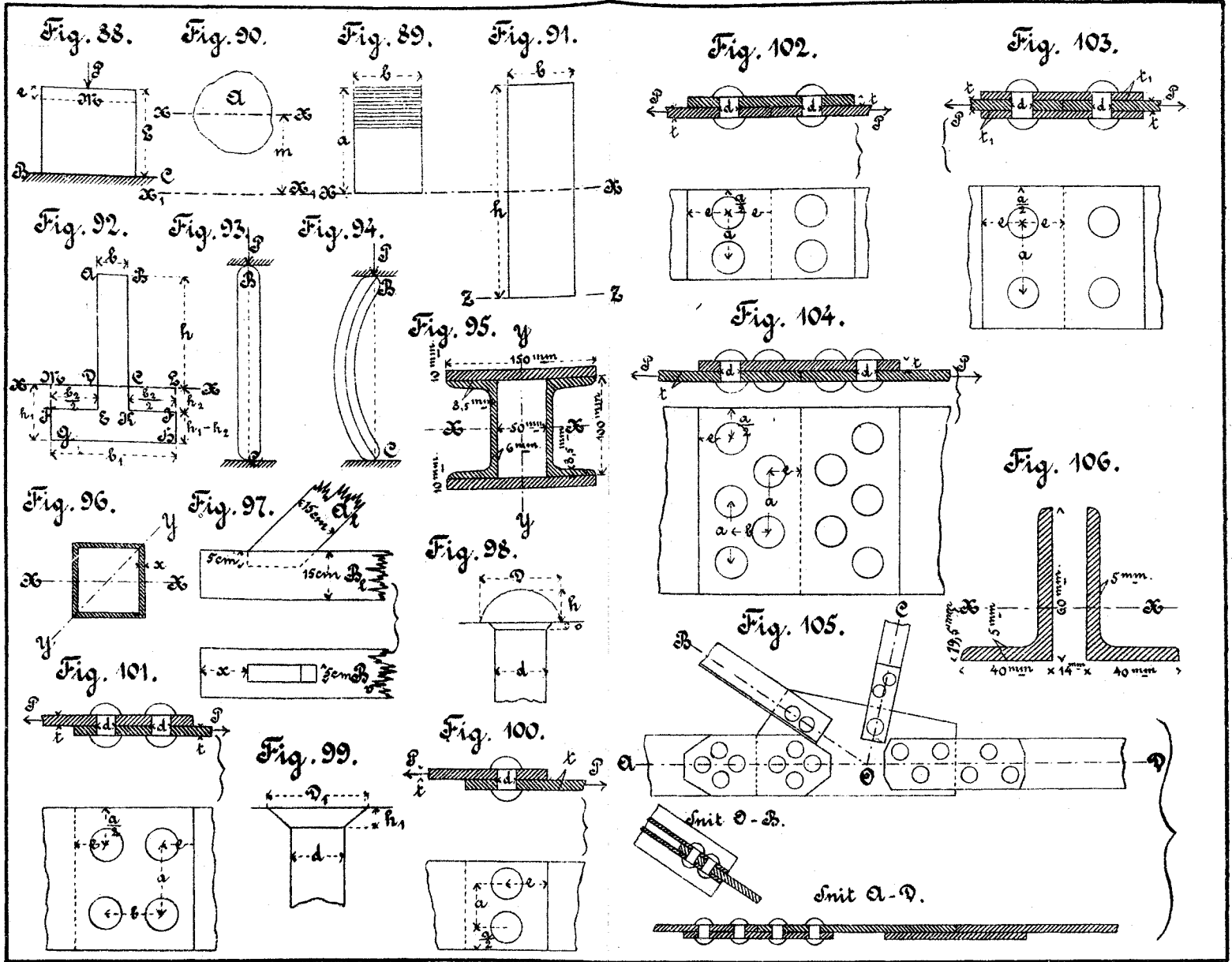




Fig. 107 a.

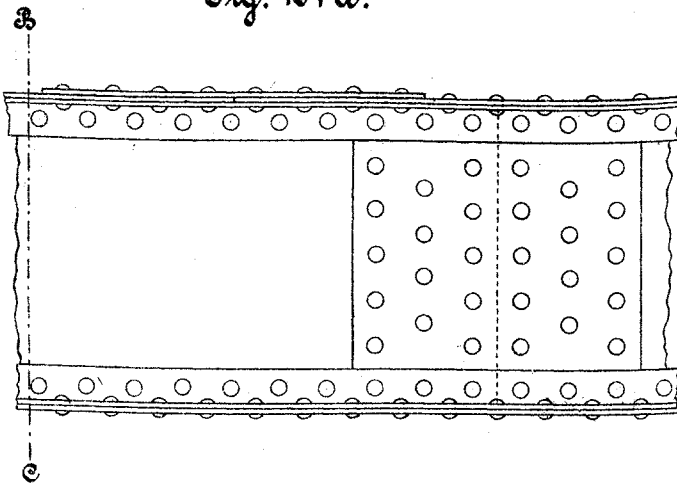


Fig. 107 b.  
Snit B - C.

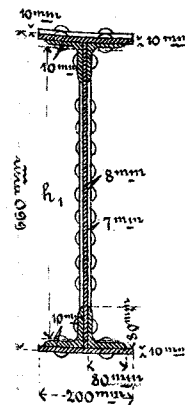


Fig. 111 a.

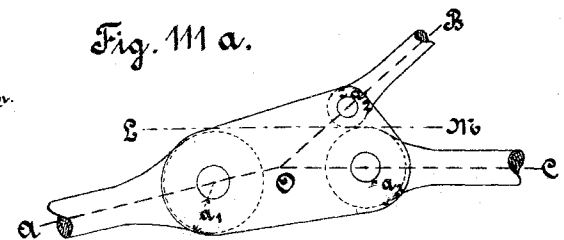


Fig. 111 b. Snit E - M6.

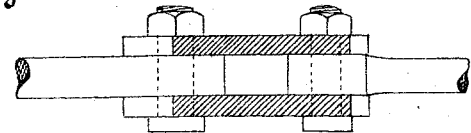


Fig. 108 a.

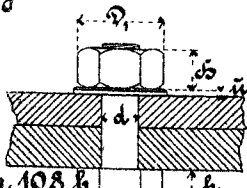


Fig. 108 b.

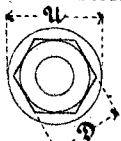


Fig. 110 a.



Fig. 110 b.

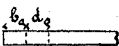


Fig. 109 a.

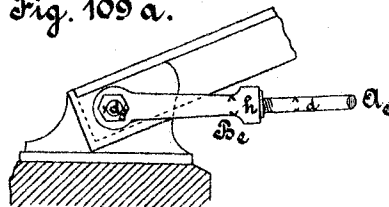


Fig. 109 b.

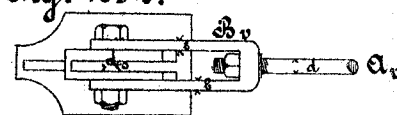


Fig. 114.

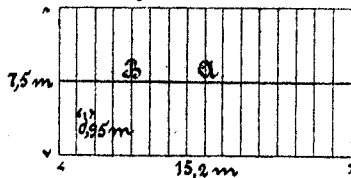


Fig. 112 a.

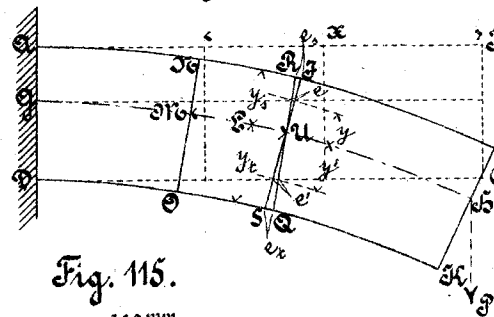


Fig. 112 b.

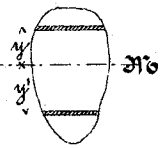


Fig. 115.

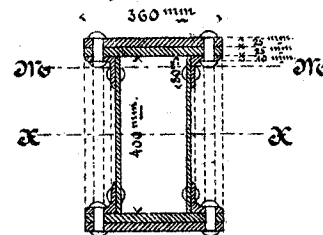
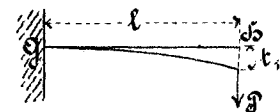


Fig. 113.



$$D = 5 + 1,4 d$$

# Plan 14.

Fig. 116.  $\xi$

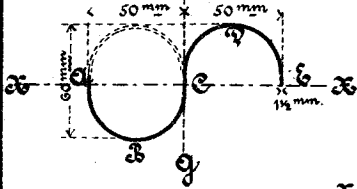


Fig. 117.

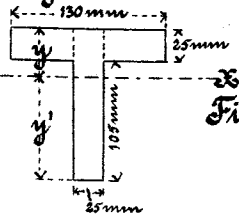


Fig. 118

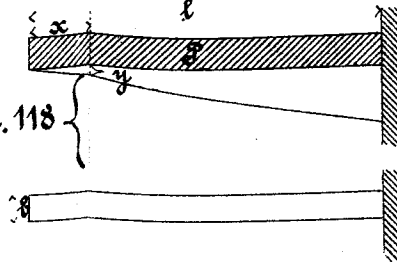


Fig. 126

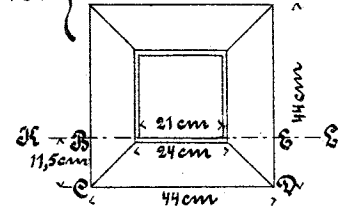


Fig. 122.

Fig. 119.

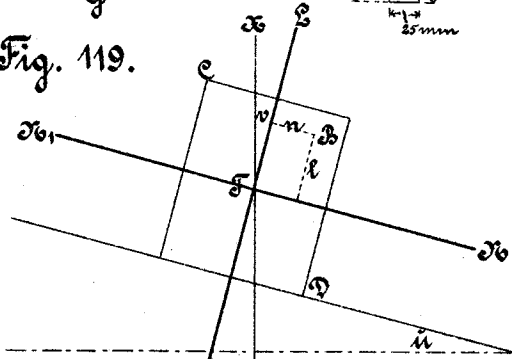


Fig. 121.

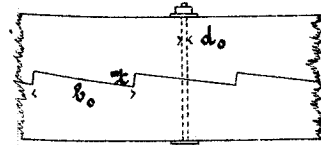


Fig. 123.

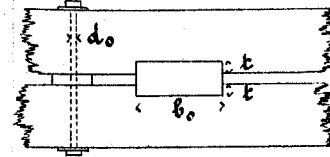


Fig. 124.

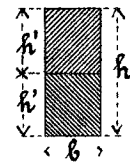


Fig. 125.

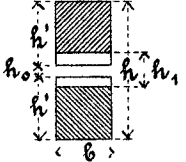


Fig. 120.

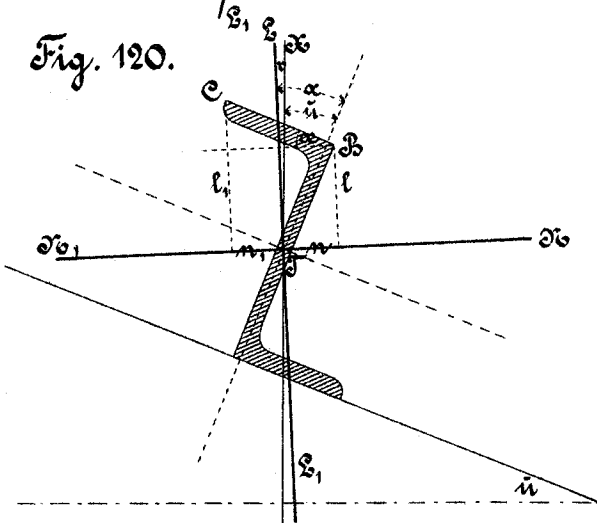


Fig. 127.

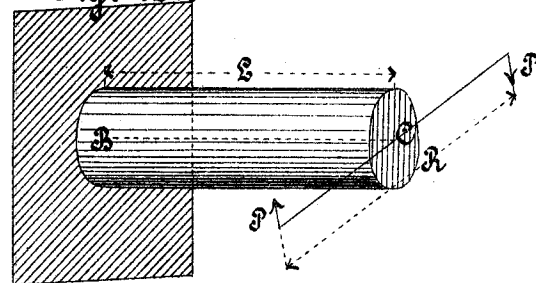


Fig. 128.

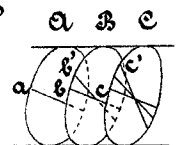


Fig. 129.

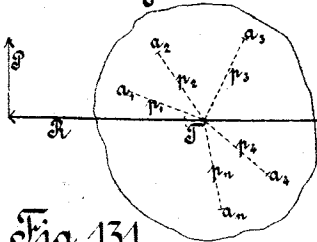


Fig. 130.

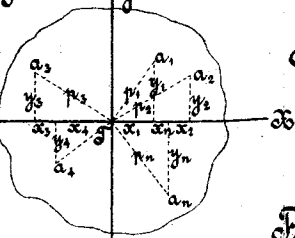


Fig. 131.

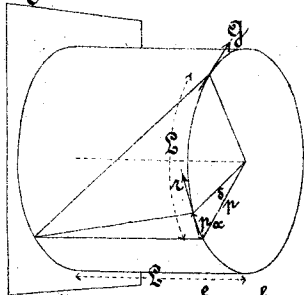


Fig. 133 a.

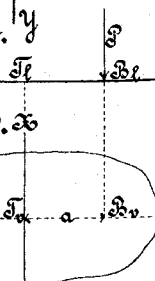


Fig. 133 b.

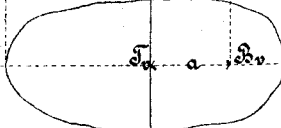


Fig. 134 a.

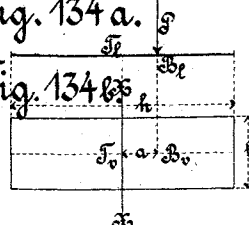


Fig. 134 b.

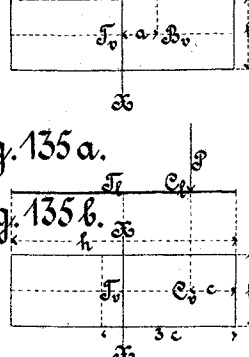


Fig. 135 a.

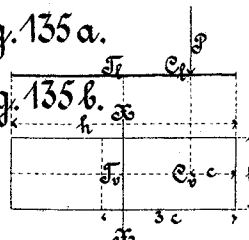


Fig. 135 b.

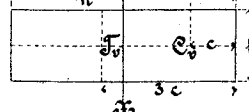


Fig. 138 a.

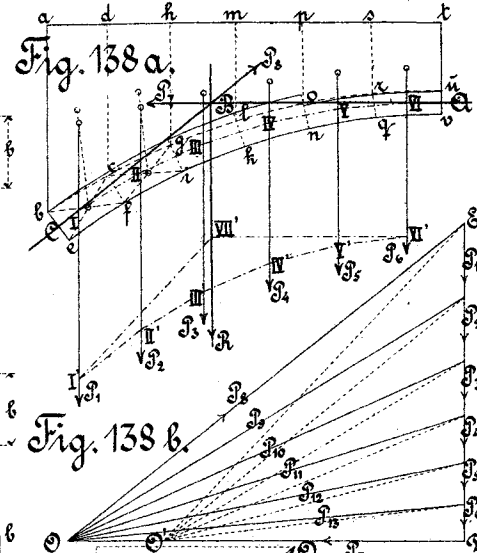


Fig. 138 b.

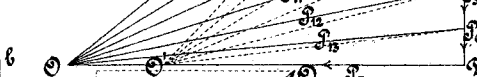


Fig. 139 a.

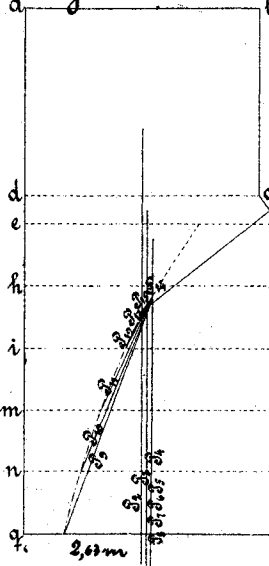


Fig. 139 b.

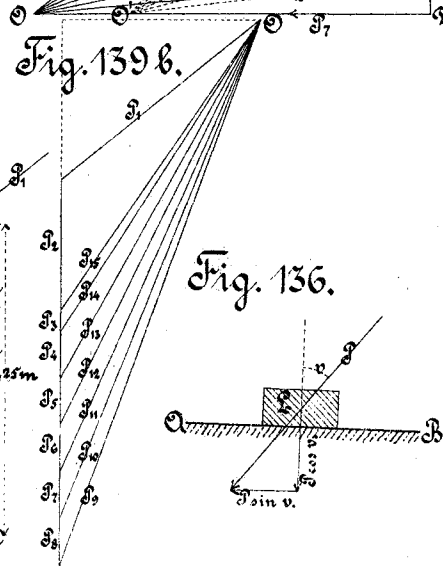


Fig. 132.

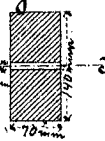


Fig. 137 a.

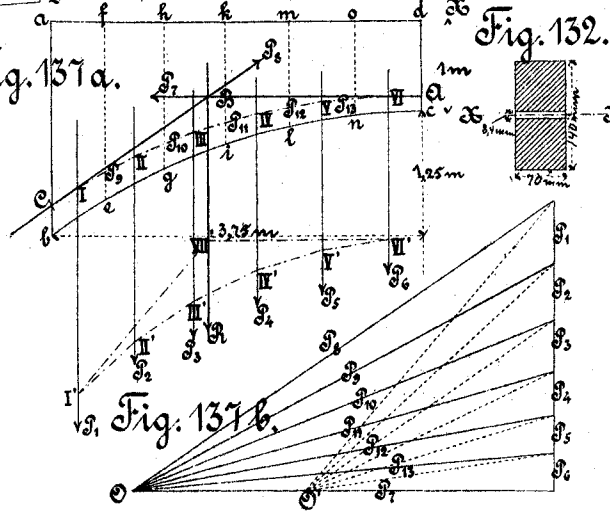


Fig. 137 b.

Kraftmaalestok for Fig. 137, 138.

Svängemaalestok for Fig. 137, 138, 139.

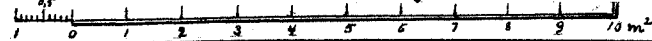
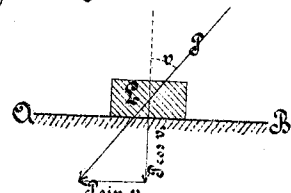
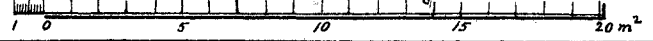


Fig. 136.



Kraftmaalestok for Fig. 139.



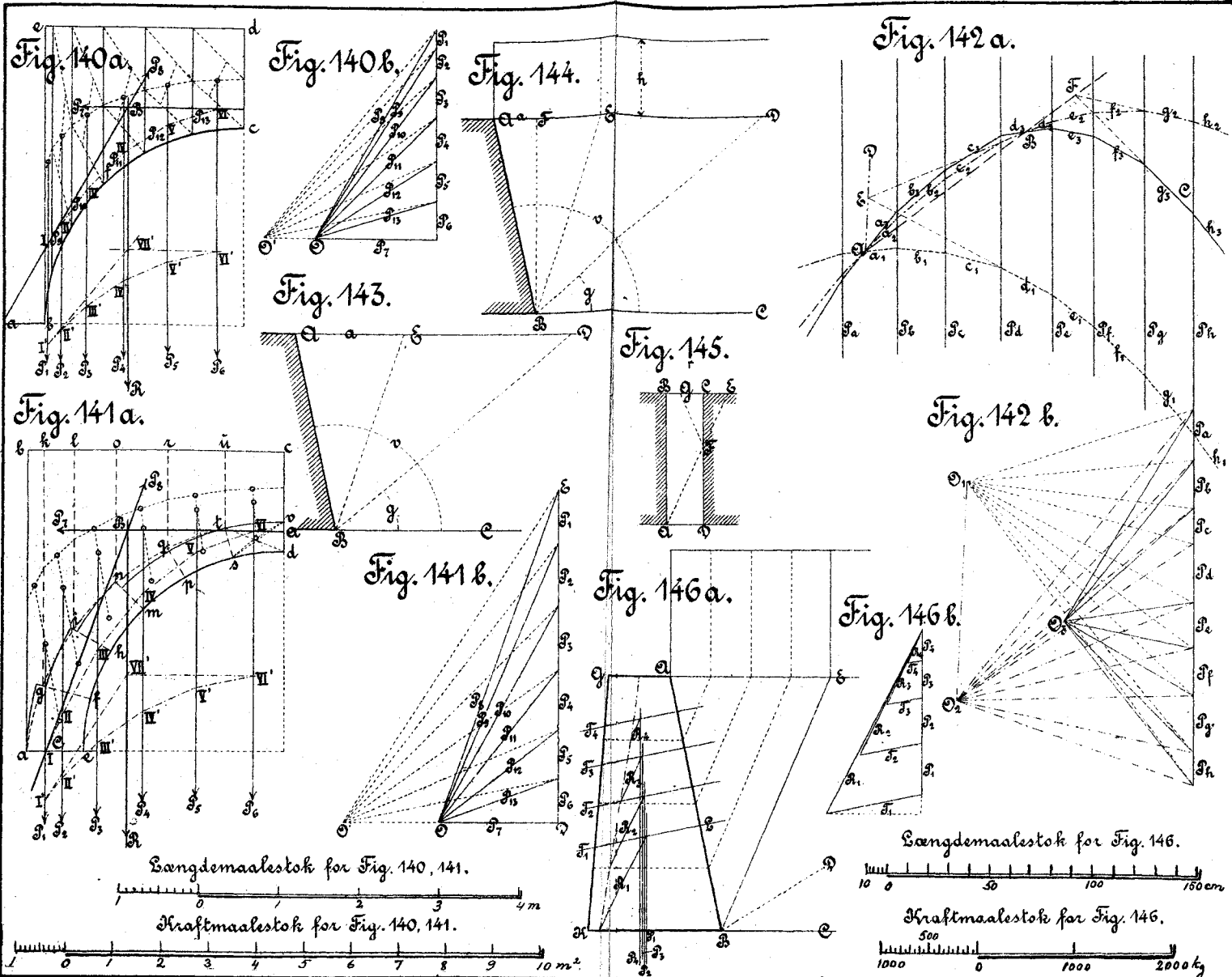


Fig. 140-146.